

Látható, hogy a számnégyesekben levő számok szorzata lépésenként az előző négyzetére változik, ezért csak akkor kaphatjuk vissza az eredeti négyest, ha a szorzat 1, azaz $abcd = 1$. (Különben a szorzat minden lépésnél csökken, vagy pedig mindig nő.)

A második számnégyesben az első és a harmadik, illetve a második és negyedik szám szorzata egyaránt $abcd = 1$. Tehát a harmadik szám reciproka az elsőnek, a negyedik pedig a másodiknak. Ez a tulajdonság megőrződik a lépések során, ugyanis egy $\left(x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ négyesből az $\left(xy, \frac{y}{x}, \frac{1}{xy}, \frac{x}{y}\right)$ számnégyest kapjuk, ami ugyanilyen tulajdonságú. Tehát a második négyestől kezdve fennáll ez a tulajdonság. Sőt, minthogy az első négyes megegyezik valamelyik későbbivel, így arra is igaz, vagyis

$$(a, b, c, d) = \left(a, b, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right).$$

Most vizsgáljuk meg, hogyan változik egy lépés során a négy szám összege. Az $\left(x, y, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ -ből indulva, képezzük a két összeg különbségét:

$$\begin{aligned} & \left(xy + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{x}{y}\right) - \left(x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \\ & = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) = \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(y + \frac{1}{y} - 1\right) - 1. \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy pozitív z számokra $z + \frac{1}{z} \geq 2$ (például a számtani–mértani közép-re vonatkozó egyenlőtlenség alapján) és egyenlőség csak $z = 1$ mellett áll fenn. Ezért

$$\left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(y + \frac{1}{y} - 1\right) - 1 \geq 0,$$

és egyenlőség csak $x = y = 1$ esetén teljesül.

A négy szám összege tehát nemcsökkenő, és ha $a \neq 1$ vagy $b \neq 1$, akkor a másodiktól kezdve minden számnégyesben a számok összege nagyobb, mint az elsőben. Így az első négyest csak $a = b = 1$, $c = \frac{1}{a} = 1$, $d = \frac{1}{b} = 1$ esetén kaphatjuk vissza, ami éppen a bizonyítandó állítás.

Pap Gyula (Debrecen, Fazekas M. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján