

Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\max_{x \in [-1, 1]} |x^2 + ax + b| \geq \frac{1}{2},$$

és egyenlőség csak az $x^2 - \frac{1}{2}$ polinomra áll. Tegyük föl, hogy valamilyen a, b esetén

$$(1) \quad |x^2 + ax + b| \leq \frac{1}{2}$$

teljesül minden $-1 \leq x \leq 1$ számra. Belátjuk, hogy ekkor $a = 0, b = -\frac{1}{2}$.

Az $x^2 + ax + b$ függvény a $[-1, 1]$ intervallumon abszolút értékének maximumát vagy az intervallum valamelyik szélén, vagy – amennyiben az a $[-1, 1]$ intervallumhoz tartozik – az $x^2 + ax + b$ parabola csúcsában veszi föl. Az

$$x^2 + ax + b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

átalakítás mutatja, hogy a parabola csúcsa az $x = -\frac{a}{2}$ pontban van. Célszerűnek látszik tehát (1)-et a -1 ; $+1$ és $-\frac{a}{2}$ pontokban felírni (ha $\left|-\frac{a}{2}\right| \leq 1$). Lássuk előbb $+1$ -re és -1 -re:

$$-\frac{1}{2} \leq 1 + a + b \leq \frac{1}{2}, (2) \quad -\frac{1}{2} \leq 1 - a + b \leq \frac{1}{2}. (3)$$

(3)-ból

$$-\frac{1}{2} \leq -1 + a - b \leq \frac{1}{2},$$

ezt (2)-höz adva

$$-1 \leq 2a \leq 1,$$

azaz

$$|a| \leq \frac{1}{2}.$$

Ezek szerint a parabola csúcsa a $[-1, 1]$ intervallumba esik, s így felírhatjuk ott is (1)-et:

$$-\frac{1}{2} \leq b - \frac{a^2}{4} \leq \frac{1}{2},$$

amiből

$$b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}.$$

(2)-t és (3)-at összeadva azt kapjuk, hogy

$$-1 \leq 2 + 2b \leq 1,$$

aminek jobb oldalából

$$b \leq -\frac{1}{2}.$$

Ezek alapján

$$-\frac{1}{2} \geq b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2},$$

ami csak úgy állhat fenn, ha

$$b = -\frac{1}{2}, \quad a = 0;$$

ekkor $x^2 + ax + b$ -re

$$\max_{x \in [-1, 1]} |x^2 + ax + b| = \max_{x \in [-1, 1]} \left| x^2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$