

Jelöljük a tetraéder éleinek felezőpontjait az *ábrán* látható módon J, K, E, O, Z, X -szel. A csúcsban szomszédos élek felezőpontjait összekötő szakaszok a tetraéder egy-egy háromszöglapjának középvonalai, ezért párhuzamosak a tetraéder egy-egy élével, hosszuk pedig a megfelelő él hosszának a fele. Így

$$\begin{aligned} ZX = EO &= \frac{AB}{2}; & ZE = OX &= \frac{CD}{2}; \\ KZ = OJ &= \frac{AC}{2}; & KX = EJ &= \frac{BC}{2}; \\ EK = XJ &= \frac{AD}{2} \quad \text{és} \quad ZJ = KO = \frac{BD}{2}. \end{aligned}$$

Ebből az is következik, hogy az $EOXZ$, $KZJO$ és $KEJX$ négyszögek paralelogrammák, mert szemközi oldalaik párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Ismert, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik oldalainak négyzetösszegével. Ezért

$$EX^2 + ZO^2 = EO^2 + OX^2 + ZX^2 + ZE^2 = \frac{1}{2} (AB^2 + CD^2), (1) ZO^2 + KJ^2 = ZJ^2 + OJ^2 + KO^2 + KZ^2 = \frac{1}{2} (AC^2 + BD^2), (2)$$

Az (1) egyenletből a (2)-t, illetve a (3)-at kivonva és felhasználva a tetraéder élhosszai közti egyenlőtlenségeket, kapjuk,

hogy

$$EX^2 - KJ^2 = \frac{1}{2}[(AB^2 + CD^2) - (AC^2 + BD^2)] = \frac{1}{2}[(AB^2 - AC^2) + (CD^2 - BD^2)] > 0, ZO^2 - KJ^2 = \frac{1}{2}[(AB^2 + CD^2) - (BC^2 + AD^2)] > 0,$$

Tehát $EX > KJ$ és $ZO > KJ$.

Vagyis a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszok közül az AB és CD – a leghosszabb élek – felezőpontjait összekötő szakasz a legrövidebb.

Zám Katalin (Eger, Szilágyi E. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az (1)–(3) egyenletrendszerből könnyen kifejezhetjük a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszok hosszát a tetraéder élével. Például:

$$KJ^2 = \frac{1}{4} (AC^2 + BC^2 + AD^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2).$$