

Jelöljük az A, B, C pontok S -en lévő merőleges vetületét A', B', C' -vel. Ha P eleget tesz a feltételeknek, és különbözik az A', B', C' pontoktól, akkor $APA' \sphericalangle = BPB' \sphericalangle = CPC' \sphericalangle$, vagyis az APA', BPB' és CPC' derékszögű háromszögek hasonlóak. Ezért

$$\frac{A'P}{B'P} = \frac{AA'}{BB'} \quad (1) \text{ és } \quad \frac{A'P}{C'P} = \frac{AA'}{CC'} \quad (2)$$

Ismert, hogy azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságának aránya e , egy egyenes, ha $e = 1$ (a két rögzített pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese); illetve egy kör, ha $e \neq 1$ (a két rögzített ponthoz és e -hez tartozó *Apollóniusz-kör*).

Tehát ha A' , B' és C' három különböző pont, akkor P nyilván egyikükkel sem eshet egybe, S -nek A' , B' és C' -től különböző pontjai közül pedig 2, 1 vagy 0 tesz eleget a feltételeknek, attól függően, hogy az $\frac{AA'}{BB'}$ és az $\frac{AA'}{CC'}$ arányokhoz és az (A', B') , illetve (A', C') pontpárokhoz tartozó Apollóniusz-köröknek vagy szakaszfelező merőlegeseknek hány közös pontjuk van. (Ha valamely P pontra (1) és (2) teljesül, akkor az ezekből következő $\frac{B'P}{C'P} = \frac{BB'}{CC'}$ is teljesül, tehát P rajta van a (B, C) pontpárhoz tartozó körön van egyenesen is.) Ha $A' \equiv B' \equiv C'$, akkor S minden pontja jó, ha A ,

B és C S -től való távolságai egyenlők (akkor a pontok közül legalább kettő egybeesik); míg ha e távolságok közt van legalább két különböző, akkor csak a $P \equiv A' \equiv B' \equiv C'$ pont jó. Végül ha A' , B' és C' közül kettő – feltehetjük, hogy A' és B' – egybeesik, a harmadik pedig ettől különböző, akkor nincs megfelelő pont, ha A és B S -től való távolsága nem egyenlő; ha pedig ez a két távolság egyenlő, akkor a megfelelő pontok az $\frac{AA'}{CC'}$ arányhoz és az (A', C') pontpárhoz tartozó kört vagy egyenest alkotják.