

A gömbréteg térfogata két gömbszelet térfogatainak különbsége gyanánt állítható elő. Az első, illetőleg a második gömbszelet alapkörének sugara r_2 és r_1 , magasságaik jeleltessenek h_2 illetőleg h_1 -gyel. A gömb sugara legyen r .

A keresett térfogat

$$t = t_2 - t_1;$$

hol

$$t_2 = \frac{\pi h_2^2}{3}(3r - h_2),$$

$$t_1 = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1).$$

Ebből

$$t = \pi r(h_2^2 - h_1^2) - \frac{\pi}{3}(h_2^3 - h_1^3).$$

Az r , h_2 és h_1 mennyiségek kiszámítására szolgál a következő egyenletrendszer:

$$h_2 - h_1 = h$$

$$(1) \quad \begin{aligned} h_2(2r - h_2) &= r_2^2 \\ h_1(2r - h_1) &= r_1^2. \end{aligned}$$

Az egyszerűsítés, melyet itt bemutatni szándékozunk, a rendes eljárást annyiban könnyíti meg, hogy feleslegessé teszi az (1) alaki egyenletrendszer megoldását az r , h_2 és h_1 szerint s mellőzhetővé lesz továbbá ezen értékek behelyettesítése a t képletébe.

Ugyanis

$$\begin{aligned} t &= \frac{\pi h}{3} \{3r(h_2 + h_1) - (h_2^2 + h_2 h_1 + h_1^2)\} = \\ &= \frac{\pi h}{3} \{2r(h_2 + h_1) - (h_2^2 + h_1^2) + r(h_2 + h_1) - (h_2 h_1)\}. \end{aligned}$$

De az (1) két utolsó egyenletéből

$$(2) \quad 2r(h_2 + h_1) - (h_2^2 + h_1^2) = r_2^2 + r_1^2$$

Ha ehhez hozzáadom az (1) első egyenletének négyzetét, lesz

$$2r(h_2 + h_1) - 2h_2 h_1 = r_2^2 + r_1^2 + h^2$$

$$(3) \quad r(h_2 + h_1) - h_2 h_1 = \frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2 + h^2)$$

A (2) és (3) alatti egyenletekből vett értékek helyettesítése után

$$t = \frac{\pi h}{3} \{r_2^2 + r_1^2 + \frac{1}{2}(r_2^2 + r_1^2 + h^2)\}$$

és végre $t = \frac{\pi h}{6} \{h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2\}$, az ismeretes képlet.