Jelöljük a négyszög csúcsait A, B, C, D-vel és legyenek az oldalak rendre $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Jelöljük továbbá az AC is BD átlók metszéspontját O-val és az $AOB\sphericalangle$-t φ -vel.

1°. Ha $AC \perp BD$, akkor

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2, \qquad \overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2,$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2, \qquad \overline{DA}^2 = \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2,$$

tehát csakugyan

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2.$$

2°. Ha viszont $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, akkor az $AOB, BOC, \ldots$ háromszögekből a cosinus-tétel szerint

$$a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{BO} \cdot \cos\varphi,$$
$$b^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2 \cdot \overline{CO} \cdot \overline{DO} \cdot \cos\varphi,$$
$$c^2 = \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + 2 \cdot \overline{BO} \cdot \overline{CO} \cdot \cos\varphi,$$
$$d^2 = \overline{DO}^2 + \overline{AO}^2 + 2 \cdot \overline{DO} \cdot \overline{AO} \cdot \cos\varphi,$$

tehát feltételünk szerint

$$-2\left(\overline{AO} \cdot \overline{BO} + \overline{CO} \cdot \overline{DO}\right) \cos\varphi = 2\left(\overline{BO} \cdot \overline{CO} + \overline{DO} \cdot \overline{AO}\right) \cdot \cos\varphi,$$

vagy még

$$\left(\overline{AO} \cdot \overline{BO} + \overline{CO} \cdot \overline{DO} + \overline{BO} \cdot \overline{CO} + \overline{DO} \cdot \overline{AO}\right) \cdot \cos\varphi = 0$$

Ámde a zárójelben csupán pozitív számok összege áll, tehát

$$\overline{AO} \cdot \overline{BO} + \overline{CO} \cdot \overline{DO} + \overline{BO} \cdot \overline{CO} + \overline{DO} \cdot \overline{AO} \neq 0$$

és így az egyedül lehetséges eset. Hogy

$$\cos\varphi = 0, \quad \text{vagyis} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{és így} \quad \mathrm{AC} \perp \mathrm{BD}.$$

(Popper Aladár, Budapest.)