

*I. Megoldás.*

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

s így

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc};$$

számlálót és nevezőt  $s$ -sel szorozva:

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc \cdot s} = \frac{T^2}{abc \cdot s}.$$

De

$$R = \frac{abc}{4T} \text{ és } r = \frac{T}{s}$$

s így

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R},$$

ahol  $r$  a háromszögbe,  $R$  a háromszög köré írt kör sugara; mivel pedig  $r < R$ , azért

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{4}.$$

*II. Megoldás.*

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} &= \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \left( \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \\ &= \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B - \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2}; \end{aligned}$$

minthogy  $\sin A$  és  $\sin B$  legnagyobb értéke = 1, azért

$$\frac{1}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B < \frac{1}{4},$$

tehát minthogy  $\sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2}$  pozitív: annál is inkább áll, hogy:

$$\frac{1}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B - \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \sin^2 \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} < \frac{1}{4}.$$

*III. Megoldás.*

$$\begin{aligned} &= \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{8 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} = \\ &= \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C}. \end{aligned}$$

De

$$\sin 2A < 2 \sin A, \quad \sin 2B < 2 \sin B, \quad \sin 2C < 2 \sin C$$

s így

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C < 2(\sin A + \sin B + \sin C),$$

miből

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} < 2$$

ezen egyenlőtlenség mindkét oldalát 8-czal osztva:

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} < \frac{1}{4}.$$