

Első megoldás.

A háromszög oldalai; a , $a + d$, $a + 2d$; a Δ területe

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

hol

$$s = \frac{a+b+c}{2}, \quad s = \frac{3}{2}(a+d)$$

$$[s - (a + d)] = \frac{a + d}{2}, \quad [s - (a + 2d)] = \frac{a - d}{2}$$

Alkalmazva tehát

$$T = \sqrt{\frac{3}{2}(a+d)\left(\frac{a+d}{2}\right)\left(\frac{a-d}{2}\right)\left(\frac{a+3d}{2}\right)}$$

$$T = \frac{a+d}{4}\sqrt{2(a-d)(a+3d)}.$$

Vegyük fel, hogy $(a + d) = x$, akkor

$$T = \frac{x}{4}\sqrt{3(x-2d)(x+2d)}$$

$$4T = x\sqrt{3(x^2 - 4d^2)}$$

$$16T^2 = 3x^4 - 12x^2d^2,$$

melyből

$$x = \pm \sqrt{\frac{+12d^2 \pm \sqrt{144d^4 + 192T^2}}{6}}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4 + 48T^2}}{3}} = a + d$$

$$a = -d \pm \sqrt{\frac{6d^2 \pm \sqrt{36d^4 + 48T^2}}{3}},$$

mely egyenletbe d -nek fent adott $d = 1$ és $T=6$ értékeket behelyettesítve, lesz

$$a = -1 \pm \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{36 + 1728}}{3}}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\frac{6 \pm \sqrt{1764}}{3}}$$

$$a = -1 \pm \sqrt{\frac{6 \pm 42}{3}}$$

$$a = -1 \pm 4$$

$$a = 3; \quad a + d = 4; \quad a + 2d = 5,$$

az a háromszög tehát derékszögű háromszög, melynek átfogója 5.

A szögekre nézve pedig

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Mint hogy azonban derékszögű háromszögről van szó, azért én a

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

képletet használhatom

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\log \sin \alpha = \log 3 - \log 5$$

$$\log 3 = 0,47712$$

$$\log 5 = \underline{0,69897}$$

$$\log \sin \alpha = 9,77815 - 10$$

$$\alpha = 36^{\circ}52'10,71''; \beta = 90 - \alpha = 53^{\circ}7'49,29''$$

Seidner Mihálynak a math. és phys. társulat I. versenyén az I. b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozata.

Második megoldás.

Legyen a 3-szög egyik oldala $= b$, akkor $a = b - d$ és $c = b + d$, továbbá

$$s = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3b}{2}; \quad s - a = \frac{b}{2} + d, \quad s - b = \frac{b}{2}, \quad s - c = \frac{b}{2} - d,$$

s mivel

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

azért

$$\frac{3b^2}{4} \left(\frac{b}{2} + d \right) \left(\frac{b}{2} - d \right) = t^2$$

s innen

$$\frac{3b^2}{4} \left(\frac{b^2}{4} - d^2 \right) = t^2$$

és

$$b^4 - 4b^2d^2 = \frac{16t^2}{3}$$

s ebből

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16t^2}{3}}} = \sqrt{2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}} \right)}$$

A gyökjelek előtt azért alkalmazunk $+$ jelt, mert b -nek tagadó és imaginarius szám nem felelhet meg.

Az utolsó képlet alapján

$$a = b - d = -d + \sqrt{2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}} \right)}$$

és

$$c = b + d = d + \sqrt{2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}} \right)}.$$

Az ismeretlen szögeket legcélszerűbben a $t = \frac{bc}{2} \sin \alpha$ és $t = \frac{ac}{2} \sin \beta$ és $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta$ képletek alapján határozhatjuk meg, a honnan

$$\sin \beta = \frac{2t}{ac}, \quad \sin \alpha = \frac{2t}{bc}.$$

Ha $d = 1$ és $t = 6$, akkor

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{2 \left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}} \right)} = \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4 \cdot 36}{3}} \right)} = \\ &= \sqrt{2(1 + \sqrt{49})} = 4 \end{aligned}$$

$a = b - d = 3$, $c = b + d = 5$. Tehát $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

A szögekre nézve:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{bc} = \frac{2 \cdot 6}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\log 3 = 0,477121$$

$$\underline{-\log 5 = 0,698970}$$

$$\log \sin \alpha = 9,778151 - 10$$

$$\frac{14}{32} : 2,81 =$$

$$\alpha = 36^{\circ}52'12''$$

$$\sin \beta = \frac{2t}{bc} = \frac{4}{5}$$

$$\log 4 = 0,602060$$

$$\underline{\log 5 = 0,698970}$$

$$\log \sin \beta = 9,903090 - 10$$

$$\frac{19}{76} : 1,58 = 48$$

$$\beta = 53^{\circ}7'48''$$

Mivel pedig $\alpha + \beta = 90^{\circ}$, azért $\gamma = 180^{\circ} - (\alpha + \beta) = 90^{\circ}$.

Pap Pálnak a math. és phys. társulat I. versenyén a II. b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozata.