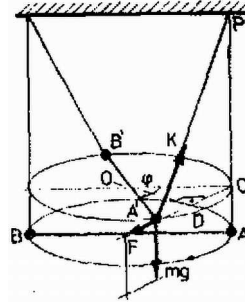


Az 1. ábrára felrajzoltuk a φ szöggel ($\varphi = \angle A'OC$) elfordított pálca helyzetét és az egyik golyóra ható erőket.



1. ábra

Mivel a pálca végén levő golyó egyensúlyban van, a rá ható erők eredője zérus. Az elforgatáshoz szükséges erőt az ábrán F -fel jelöltük. F és az mg súlyerő eredője a fonálban ébredő K erővel azonos nagyságú, azzal ellentétes irányú. Az ábrából látható, hogy a fenti három erőből alkotott háromszög hasonló az $A'PC$ háromszöggel, így

$$(1) \quad \frac{F}{mg} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{PC}}.$$

Az $A'OC$ háromszögből $\overline{A'C} = 2 \cdot R \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ és az $A'PC$ derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel segítségével

$$\overline{PC} = \sqrt{L^2 - \left(2R \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

(1)-ből a fentiek alapján

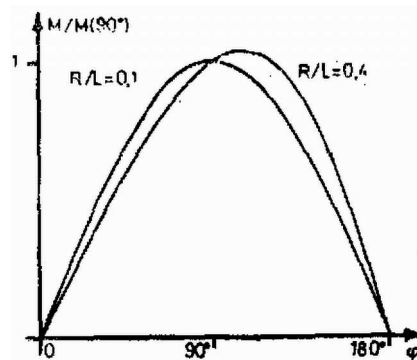
$$(2) \quad F = mg \frac{2R \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(2R \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2}}.$$

A másik golyóra ugyanilyen nagyságú, de ellentétes irányú erőt kell kifejteni, így a két erő erőpárt alkot. Az erőpár forgatónyomatéka:

$$(3) \quad M = F \cdot 2 \cdot \overline{OD},$$

ahol $\overline{OD} = R \cdot \cos \frac{\varphi}{2}$. Az F erő (2) alakját (3)-ba írva a forgatónyomatékra az alábbi kifejezést kapjuk:

$$(4) \quad M = mg \frac{2R^2 \sin \varphi}{\sqrt{L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$



2. ábra

A 2. ábrán $R/L = 0,1$ ill. $R/L = 0,4$ értéknél felrajzoltuk a $M(\varphi)$ függvényt. Látható, hogy a görbe maximuma jobbra tolódik a $\varphi = 90^\circ$ -os ponthoz képest. A (4) képletből az is látszik, hogy $\varphi = 180^\circ$ -os elforgatás csak $R/L < 0,5$ esetén lehetséges, mert ellenkező esetben a túl rövid kötél miatt a pálca már $\varphi < 180^\circ$ -nál eléri a felfüggesztés síkját. 180° felett a két fonál mindenképp összeér, ezért itt az eredményeink már nem érvényesek.

Megjegyzés. A rendszer energiaváltozásából is ki lehet szántani a forgatónyomatékot. Ha egy testre F erő hat és az $\Delta\varphi$ szöggel elfordul a forgáspont körül, akkor $\Delta W = F \cdot \Delta\varphi \cdot r$ a munkavégzés; ahol r az F erő erőkarjának hosszát jelöli. Mivel $F \cdot r$ éppen a forgatónyomaték, így azt kapjuk, hogy $\Delta W = M \Delta\varphi$, azaz $M = \frac{\Delta W}{\Delta\varphi}$. Az energiamegmaradás törvénye miatt ΔW egyenlő a rendszer helyzeti energiájának ΔE megváltozásával. (A helyzeti energia általában függ a φ szögtől.) A $\frac{\Delta E}{\Delta\varphi}$ hányados annál pontosabban adja meg M értékét, minél kisebb $\Delta\varphi$. Ez matematikailag azt jelenti, hogy

$$(5) \quad M = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta\varphi} = \frac{dE}{d\varphi}.$$

A forgatónyomaték tehát az E helyzeti energia φ szerinti deriváltjaként is megkapható.

A rendszer helyzeti energiája:

$$E(\varphi) = 2mg \cdot \overline{AC} = 2mg \left(D^2 - \sqrt{L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right).$$

A differenciálszámításban járatosak az $E(\varphi)$ függvényt deriválva az M forgatónyomatéokra éppen a (4) formulát kapják meg.

Kovács Tibor (Lenti, Gönczi F. Gimn., IV. o. t.)