

Jelöljük az ék (vízszintes) gyorsulását A -val, a golyónak az ékhez viszonyított (felfelé irányított) gyorsulását pedig a -val (lásd az *ábrát*). A golyó gyorsulása ekkor a talajhoz (inerciarendszerhez) viszonyítva:

$$(1) \quad a_x = A - a \cos \alpha, \quad \text{illetve} \quad a_y = a \sin \alpha,$$

szöggyorsulása pedig (a csúszásmentes gördülés feltétele miatt) $\beta = a/R$.

Ha az ék és a golyó között ható nyomóerőt K -val, a súrlódási erőt pedig S -sel jelöljük (az ábrán látható irányítással),

akkor a az ék illetve a golyó mozgásegyenletei:

$$F - S \cos \alpha - K \sin \alpha = MA, (2) K \cos \alpha - S \sin \alpha - mg = ma_y, (3) K \sin \alpha + S \cos \alpha = ma_x, (4)$$

a golyó forgómozgásának egyenlete pedig

$$(5) \quad SR = \frac{2}{5} mR^2 \beta.$$

(Feltételeztük, hogy a gömb homogén tömegeloszlású, s így a tehetetlenségi nyomatéka $2mR^2/5$.)

Felhasználhatjuk még, hogy a golyó t idő alatt függőleges irányban egyenletesen gyorsulva h magasságba kerül, tehát

$$h = \frac{a_y t^2}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad a_y = \frac{2h}{t^2} = 0,4 \text{ m/s}^2,$$

s így a golyónak az ékhez viszonyított gyorsulására

$$a = \frac{a_y}{\sin \alpha} = 1,17 \text{ m/s}^2$$

adódik. Innen (5) és a gördülés feltételének felhasználásával

$$S = \frac{2}{5} ma = 4,68 \text{ N},$$

(3)-ból pedig

$$K = \frac{mg + S \sin \alpha + ma_y}{\cos \alpha} = 110,3 \text{ N}.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele: $|S| \leq \mu N$, azaz

$$\mu \geq \frac{S}{N} = 0,042.$$

K és S ismeretében (4) alapján kiszámíthatjuk a_x -et, majd (1) felhasználásával az ék gyorsulását

$$(6) \quad A = \frac{7a + 5g \sin \alpha}{5 \cos \alpha} = 5,31 \text{ m/s}^2,$$

a (2) egyenletből pedig a keresett F erőt:

$$(7) \quad F = (m + M)g \cdot \tan \alpha + \left(\frac{7}{5}M + \frac{2 + 5 \sin^2 \alpha}{5}m \right) \frac{2h}{t^2 \sin \alpha \cos \alpha} = 148,4 \text{ N}.$$

Deme Roland (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o.t.) és *Zawadowski Ádám* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A számítás során nem vettük figyelembe, hogy a golyó kezdetben nem érintheti az ék legalsó pontját (hiszen akkor a talajba nyomódna), hanem egy kicsivel (kb. 1 cm-rel) magasabbról indulhat csak.

Mátyási István (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.)

2. Az ékre ható erőt a munkatétel és a lendületváltozás törvénye segítségével is ki lehet számítani. Jelöljük az ék (egyenletes) gyorsulását most is A -val, a golyónak az ékhez viszonyított gyorsulását pedig a -val. A mozgás t ideje alatt az ék $V = At$ sebességre gyorsul fel. A golyó vízszintes sebessége $v_x = At - at \cos \alpha$, függőleges sebessége $v_y = at \sin \alpha$, szögsebessége pedig $\omega = at/R$ lesz. Ugyanezen idő alatt az ék elmozdulása $At^2/2$, a golyó függőleges emelkedése h , így rendszerre ható külső erők munkája: $W = F \cdot At^2/2 - mgh$. A munkatétel szerint fennáll, hogy

$$F \cdot \frac{At^2}{2} - mgh = \frac{1}{2}M \cdot (At)^2 + \frac{1}{2}m \cdot (at \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2}m \cdot (At - at \cos \alpha)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \left(\frac{a}{R} \right)^2.$$

Az F erő t idő alatt megváltoztatja a rendszer vízszintes irányú lendületét (impulzusát):

$$Ft = M \cdot At + m \cdot (At - at \cos \alpha).$$

A fenti két egyenletből F -t és A -t kiszámíthatjuk, és a (6), illetve (7) képleteknek megfelelő értékeket kapjuk.

Az itt alkalmazott megoldási módszernek az az előnye, hogy benne a rendszerre ható külső erők (F és mg) szerepelnek csak, a belső erők (S és K) nem. Ugyanez jelenti a módszer hátrányát is: mivel a rendszer egészére vonatkozó mennyiségeket (mozgási energiát, lendületet) vizsgáljuk, az egyes részek között ható belső erőkről semmit nem tudunk állítani, s emiatt például a súrlódási együttható minimális értékét sem tudjuk egyszerű eljárással meghatározni.

(G. P.)