

Jelöljük a henger tömegközéppontjának valamely α szöggel jellemzett helyhez tartozó pillanatnyi sebességét v -vel, pályamenti gyorsulását a -val, szöggyorsulását β -val, a vájat által kifejtett nyomóerőt N -nel, a tapadó súrlódási erőt pedig T -vel (*1. ábra*).

A henger mozgásegyenlete a pályaérintő irányában

$$(1) \quad mg \sin \alpha - T = ma,$$

sugárirányban

$$(2) \quad N - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R - r},$$

a forgómozgás egyenlete pedig

$$(3) \quad Tr = \frac{1}{2}mr^2 \beta.$$

A tiszta (csúszásmentes) gördülés feltétele szerint a hengernek a vájattal éppen érintkező pontja áll: $v - r\omega = 0$, ahonnan

$$(4) \quad v = r\omega, \quad \text{azaz} \quad a = r\beta.$$

Felírhatjuk még a mechanikai energia megmaradását kifejező egyenletet:

$$(5) \quad mg(R - r) \cdot (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}mr^2 \right) \omega^2,$$

ahol $\alpha_0 = 60^\circ$, tehát $\cos \alpha_0 = \frac{1}{2}$.

Az (1) – (5) egyenletrendszert megoldva az erőkre

$$(6) \quad T = \frac{mg}{3} \sin \alpha,$$

$$(7) \quad N = \frac{mg}{3} (7 \cos \alpha - 2)$$

adódik. (Érdekes, hogy a hengerre ható erők nem függenek sem a vájat, sem a henger sugarától, de még azok arányától sem.)

A vájat mozgásegyenletei a *2. ábra* jelöléseivel:

$$(8) \qquad F - Mg - N \cos \alpha - T \sin \alpha = 0,$$

$$(9) \qquad S - N \sin \alpha + T \cos \alpha = 0,$$

a meg nem csúszás feltétele pedig

$$(10) \qquad \mu_0 F \geq S.$$

A (6) és (7) kifejezéseket (8)-ba és (9)-be helyettesítve, majd azokból S -et és F -et kifejezve a (10) egyenlőtlenséget

$$(11) \quad \mu_0 \geq 2 \sin \alpha \frac{3 \cos \alpha - 1}{6 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha + 11} \equiv f(\alpha)$$

alakra hozhatjuk. Ha ábrázoljuk az $f(\alpha)$ függvényt a $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ intervallumon (3. ábra), a grafikonról leolvashatjuk, hogy $f(\alpha) \leq \mu_{\text{krit}} \approx 0,13$. A megadott számadatokkal a (11) feltétel minden szögnél teljesül, a henger tehát *egyáltalán nem csúszik meg*.

