I. megoldás. A rúddal együtt állandó ω szögsebességgel forgó (gyorsuló!) koordináta-rendszerből nézve az m tömegű, a forgástengelytől x távolságban levő gyűrűre $F(x) = mx\omega^2$ nagyságú centrifugális erő hat. Ez az erő x-nek lineáris függvénye, az R hosszú rúdon végzett munkája szempontjából tehát helyettesíthető az átlagos

$$F_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}F_{\max} = \frac{1}{2}mR\omega^2$$

erővel (*1. ábra*). Ennek az erőnek a munkája R úton meg kell egyezzék a gyűrű mozgási energiájának megváltozásával:

$$W = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mv_r^2,$$

ahonnan a gyűrű radiális sebessége a lerepülés pillanatában $v_r = R\omega$.

Másrészt a gyűrű ω szögsebességgel forog a rúddal együtt, így a külső megfigyelő azt látja, hogy $v_t = R\omega$ tangenciális (érintő irányú) sebességgel rendelkezik. Látható, hogy a gyűrű radiális és tangenciális sebessége éppen megegyezik, tehát a gyűrű 45°-os szögben repül le a rúdról.

Jakabfy Miklós (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.), *Szabó László* (Temesvár, Bartók B. Líceum, II. o.t.)

II. megoldás. Írjuk le a rúd és a gyűrű mozgását inerciarendszerből nézve! Tételezzük fel, hogy a rúdra nem hat semmilyen külső forgatónyomaték, emiatt a rendszer (a rúd és a gyűrű) teljes perdülete és teljes mozgási energiája a gyűrű mozgása során nem változhat meg.

Jelöljük a rúd tömegét M-mel, hosszát R-rel, kezdeti szögsebességét pedig ω-val. Amikor az m tömegű gyűrű a rúd szélére ér, a szögsebesség ω_1, a gyűrű radiális sebessége pedig v_r lesz. Az impulzusnyomaték megmaradása

$$\frac{1}{3}MR^2\omega = \left(\frac{1}{3}MR^2 + mR^2\right)\omega_1,$$

a rendszer energiájának megmaradása pedig

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}MR^2 + mR^2\right)\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_r^2.$$

Ebből a két egyenletből ω_1 és v_r kiszámítható:

$$\omega_1 = \frac{M}{M+3m}\omega, \quad \text{illetve} \quad v_r = R\omega\sqrt{\frac{M}{M+3m}}.$$

Amennyiben $M \gg m$ (ez a határeset felel meg a feladat szövegében szereplő *egyenletesen forgó* rúdnak), $\omega_1 = \omega$, illetve $v_r = R\omega$ áll fenn. Eszerint a gyűrű sugárirányú és érintőleges sebessége megegyezik, ami annyit jelent, hogy 45°-os szögben repül le a rúdról.

Deme Roland (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o.t.), *Völgyi István* (Szekszárd, Garay J. Gimn., IV. o.t.)

III. megoldás. Vizsgáljuk a gyűrű mozgását a Földhöz rögzített koordináta-rendszerben. Legyen a pillanatnyi radiális sebessége v_r, tangenciális sebessége v_t, a forgástengelytől mért távolsága pedig x. Egy kicsiny Δt idő alatt a gyűrűnek a tengelytől mért távolsága $\Delta x = v_r\Delta t$ értékkel megnő, emiatt a tangenciális sebessége (amely minden helyzetben $v_r = x\omega$) meg kell változzék

$$\Delta v_t = v_r \cdot \omega\Delta t$$

értékkel. Másrészt a gyűrűre ható erő mindig merőleges a rúdra, ezért a teljes sebességének rúdirányú komponense nem változhat meg. A *2. ábráról* leolvashatjuk, hogy ez a feltétel (kicsiny szögek koszinuszát 1-gyel, szinuszát pedig a szöggel közelítve) annyit jelent, hogy

$$\Delta v_r = v_t \cdot \omega\Delta t.$$

A fenti két egyenlet szerint

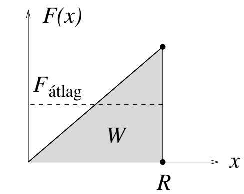
$$\Delta(v_t^2) = 2v_t\Delta v_t = 2v_r\Delta v_r = \Delta(v_r^2),$$

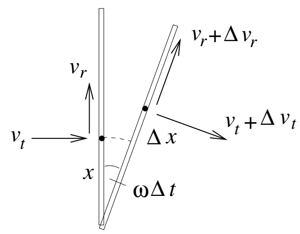
vagyis $v_t^2 - v_r^2 =$állandó. Mivel ez a különbség kezdetben nulla volt, később is az kell maradjon, tehát a mozgás során később is fennáll, hogy $v_r = v_t$. Eszerint a gyűrű sebessége mindig 45°-os szöget zár be a rúddal, s ez akkor is igaz, amikor lerepül róla.

Kacsuk Zsófia (Budaörs, Illyés Gy. Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzések. 1. A gyűrű sebessége minden pillanatban 45°-os szöget zár be a rúd irányával, a pályagörbéje az $x(\varphi) = x_0e^{\varphi}$ egyenletű ún. logaritmikus spirál. A lerepülésig eltelő idő pontszerűnek tekintett és a forgástengely közvetlen közeléből indított gyűrű esetén nagyon nagy (határesetben végtelen) is lehet. Véges méretű és a forgástengelytől tetszőlegesen közelről induló gyűrűm véges idő alatt éri el a rúd szélét.

2. A forgó koordináta-rendszerben sugár irányban mozgó gyűrűre a centrifugális erőn kívül hat még a Coriolis-erő is. Ez az erő azonban merőleges a rúdra, s így (súrlódás hiányában) nem kap szerepet a munkatételben.


F(x)
F átlag
W
x
R


v r + Δ v r
v r
v t + Δ v t
v t
Δ x
x
ω Δ t