

Hanyagoljuk el a Föld forgását! A Földet átszelő alagútban a vonatot a G gravitációs erő és az alagút által kifejtett N tartóerő eredője, azaz a gravitációs erő alagút irányú F összetevője fog hatni (1. ábra). A gravitációs „tézerősség” egy homogén gömb belsejében, a középponttól x távolságra:

$$g(x) = -\frac{\gamma M}{R^3}x,$$

ahol γ a gravitációs állandó, M a Föld tömege, R pedig a sugara. (A negatív előjel arra utal, hogy az alagútban haladó vonatra a Föld középpontja felé mutató erő hat.)

Jelölje O a Föld középpontját, T a Föld középpontjából az alagútra állított merőleges talppontját, K Kolozsvárt, E pedig az Északi-sarkot. A jelentse T és K pontok távolságát (ez megegyezik a TE távolsággal), y pedig a vonat és a T pont távolságát (2. ábra).

A tézerősség alagút irányú komponense:

$$g_a = -\frac{\gamma M}{R^3}x \frac{y}{x} = -\frac{\gamma M}{R^3}y.$$

Eszerint a vonatra a T ponttól mért távolsággal egyenesen arányos erő hat, ezért a vonat harmonikus rezgőmozgást fog végezni. A rezgőmozgás körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{-\frac{g_a}{y}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}.$$

A vonat az Északi-sarkra a fél periódusidő alatt fog eljutni:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}.$$

Az ismert adatokat behelyettesítve megkapjuk, hogy a vonat 2534 másodperc (kb. 42 perc) alatt jut el az Északi-sarkra. Az idő meghatározásánál nem használtuk fel, hogy Kolozsvár a Föld mely pontján fekszik. A Föld bármely két pontja között – a feladatban szereplő feltételek teljesülése esetén – ennyi ideig tartana az út.

A maximális sebességet a $v_{\max} = A\omega$ képletből számíthatjuk ki.

$$v_{\max} = A \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}.$$

Behelyettesítve az adatokat, és felhasználva, hogy Kolozsvár a 47° szélességi körön fekszik ($A = R \cdot \sin \frac{90^\circ - 47^\circ}{2} \approx 2353$ km), $v_{\max} = 2920$ m/s adódik.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.)

