Egy test akkor csúszik egyenletesen lefele egy lejtőn, ha az mg súly lejtőirányú komponense és a súrlódási erő kiegyenlítik egymást:

$$mg\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha, \text{vagyis} \mu = \operatorname{tg}\alpha. (1)$$

Ha a testet vízszintesen indítjuk el, elegendően hosszú idő múlva a lejtővel párhuzamosan lefele egyenletesen fog mozogni. Az *ábrán* kiszemeltük a pálya egy pontját, amelyben a test $\mathbf{v}$ sebessége β szöget zár be a lejtő aljával párhuzamos x tengellyel. Írjuk fel a test gyorsulásának érintő irányú (tehát $\mathbf{v}$-vel párhuzamos) komponensét, $a_é$-t, és az y irányú komponensét, a_y-t:

$$a_é = g\sin\alpha\sin\beta - \mu g\cos\alpha,$$
$$a_y = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha\sin\beta.$$

(1) felhasználásával

$$a_é = g\sin\alpha(\sin\beta - 1),$$
$$a_y = g\sin\alpha(1 - \sin\beta).$$

Látjuk, hogy $a_é + a_y = 0$, vagyis

(2) $$v + v_y = \text{állandó}.$$

Kezdetben $v = v_0$ és $v_y = 0$, elegendően hosszú idő múlva pedig $v = v_y$. Tehát (2) alapján

$$v_0 + 0 = v + v,$$

ahonnan a keresett végsebesség: $v = v_0/2$.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. A lejtőn való mozgás x és y irányú komponenseit jellemző differenciálegyenleteket közelítően (kis lépések módszerével) számítógéppel is meg lehet oldani. $v_0 = 2$ m/s, $\alpha = 30°$, $\mu = \operatorname{tg} 30°$ és $g = 10$ m/s^2 adatokat választva, és a változásokat $\Delta t = 0,1$ s időközönként kinyomtatva, de a számítást sokkal kisebb lépésenként számolva az alábbi eredményeket kapjuk:

t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
x (m)	0,00	0,17	0,30	0,39	0,45	0,48	0,51	0,52	0,52	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53
y (m)	0,00	0,02	0,08	0,16	0,26	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	1,05	1,15
v_x (m/s)	2,00	1,50	1,06	0,69	0,44	0,27	0,16	0,10	0,06	0,04	0,02	0,01	0,01	0,00
v_y (m/s)	0,00	0,06	0,69	0,88	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Érdekes, hogy a $v_0/2$ végsebesség milyen rövid idő alatt valósul meg.

Kovács Krisztián (BME, I. éves hallgató)