

I. megoldás. Jelöljük a pálcák tömegét m_1 -gyel és m_2 -vel! Mivel a tömegeloszlásuk egyenletes, a tömegük arányos a hosszukkal, vagyis a hosszegységre eső tömegük megegyezik:

$$(1) \quad \frac{m_1}{l_1} = \frac{m_2}{l_2} = \lambda.$$

A pálcák kétféleképpen zárhatnak be 45° -os szöget a függőlegessel: ha párhuzamosak egymással, vagy ha merőlegesek egymásra. Hasonlóan az **FF. 2840.** feladat megoldásához (lásd lapunk 304. oldalán), ennél a feladatnál is belátható, hogy a megadott feltételeknek csak a merőlegesen elhelyezkedő pálcák felelnek meg. Foglalkozzunk tehát ezzel az esettel!

Írjuk le a pálcák „mozgását” az ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerből nézve! Ebben a rendszerben a pálcák nem mozognak, egyensúlyban vannak, tehát a rájuk ható erők eredője, illetve az erők forgatónyomatékának összege – külön-külön mindkét pálcára – nulla kell legyen. Az erők és a forgatónyomatékok számításánál figyelembe kell vennünk, hogy a forgó koordináta-rendszer *nem inerciarendszer*, tehát benne a szokásos *valódi* (más testekkel való kölcsönhatást kifejező) erőkön kívül ún. *tehetetlenségi erők* is fellépnek. A koordináta-rendszerhez képest álló testeknél csak egyfajta tehetetlenségi erőt kell számításba vennünk: a centrifugális erőt.

A továbbiak könnyebb áttekinthetősége érdekében gondoljuk végig a következő feladatot! Egy m_1 tömegű, l_1 hosszúságú, homogén tömegeloszlású pálcát, mely 45° -os szögben csuklósan csatlakozik a függőleges forgástengelyhez, az alsó végét pedig vízszintes fonál köti össze a tengellyel, ω szögsebességgel megforgatjuk (*1. ábra*). Mekkora erő feszíti a fonalat?

A forgó koordináta-rendszerből nézve a test az $m_1\mathbf{g}$ nehézségi erő, a $\mathbf{K}$ kötélérő, az O csuklóponthoz ható (ismeretlen irányú és nagyságú) erő, valamint a pálca egyes részeire ható centrifugális erők eredőjének hatására egyensúlyban van. Célszerű az O pontra vonatkozó forgatónyomatéki egyenletet felírunk, mert ebben nem kapnak szerepet az O -nál ható erők. (Az erők egyensúlyának feltételét ezek után már nem is érdemes felírni, hiszen ezekből az egyenletekből éppen az O -nál ható erőket tudjuk kiszámítani, s ezekre általában nincs szükségünk.) Vajon mekkora a pálca egyes darabkaira ható centrifugális erők eredője? A centrifugális erő helyről helyre változik (a forgástengelytől mért távolság változása miatt), de mivel ez a változás lineáris, az erő *nagyságának* szempontjából számolhatunk átlagos erővel, vagyis úgy, mintha a test egésze az S tömegközéppontban helyezkedne el:

$$F = \sum F_{\text{cf}} = m_1 r_{\text{átlag}} \omega^2 = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2.$$

Vigyázat: nem szabad azt gondolnunk, hogy ennek az erőnek a támadáspontját is az S pontba helyezhetjük, hiszen a test alsó felére ható centrifugális erők nyilván nagyobbak, mint a felső felére ható erők, s emiatt az S pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomatékuk *nem nulla*.

Melyik az a Q pont a pálca mentén, amelyre vonatkoztatva a centrifugális erők eredő forgatónyomatéka nulla lenne? Könnyen beláthatjuk, hogy ez a pont a pálca alsó harmadoló pontja. Ha ugyanis egy derékszögű háromszög alakú, homogén anyageloszlású lemezt függőlegesen tartunk úgy, hogy az AB befogó vízszintes legyen (*2. ábra*), akkor a lemezre ható nehézségi erő is egy lineárisan növekvő erőrendszer eredője, hasonlóan az általunk vizsgált centrifugális erők rendszeréhez. A homogén háromszöglemez tömegközéppontja viszont a háromszög geometriai értelemben vett súlypontjába esik, s ez | mint közismert | harmadolja a súlyvonalakat, függőleges vetülete pedig harmadolja az AB szakaszt. Az *1. ábrán* látható pálca egyensúlyának feltétele tehát:

$$m_1 g \frac{l_1}{2\sqrt{2}} + K \frac{l_1}{\sqrt{2}} = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l_1}{\sqrt{2}},$$

ahonnan a keresett K kötélérő: $K = m_1 g \left(\frac{l_1 \omega^2}{3\sqrt{2}g} - \frac{1}{2} \right).$

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz! A felső, OP pálcára F_1 centrifugális erő hat, támadáspontja a pálca alsó harmadoló pontja. Az alsó pálca PQ szakaszára ugyancsak F_1 erő hat, a QR szakaszra pedig F_2 , mindkettő a megfelelő szakasz külső (a forgástengelytől távolabb eső) harmadoló pontjánál (*3. ábra*). A pálcákra hat még a nehézségi erő, amely az egyes pálcák tömegközéppontjában vehető fel, továbbá a P és O csuklópontoknál ismeretlen irányú és ismeretlen nagyságú erők lépnek fel. Ez utóbbiakkal nem kell törődnünk, ha az alsó pálcának a P pontra vonatkozó forgatónyomatéki egyenletét, az egész rendszernek pedig az O pont körüli forgási egyensúly feltételét írjuk fel. Mivel

$$(2) \quad F_1 = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2,$$

$$\text{és}(3) \quad F_2 = m_2 \frac{l_2 - l_1}{l_2} \cdot \frac{l_2 - l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2,$$

a P pontra vonatkozó forgási egyensúly feltétele:

$$(4) \quad F_1 \cdot \frac{l_1}{3\sqrt{2}} + m_2 g \frac{l_2}{2\sqrt{2}} = F_2 \left(l_2 - \frac{l_2 - l_1}{3} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Hasonlóan kapjuk a két pálcából álló teljes rendszer O pontra vonatkoztatott forgási egyensúlyi egyenletét:

$$(5) \quad m_1 g \frac{l_1}{2\sqrt{2}} + m_2 g \left(l_2 - \frac{l_1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} + F_2 \left(l_1 + l_2 - \frac{l_2 - l_1}{3} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} = F_1 \left(\frac{2}{3} \frac{l_1}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \frac{l_1}{\sqrt{2}} \right).$$

A (2) és (3) összefüggéseket (4)-be helyettesítve és (1)-t is felhasználva, algebrai átalakítások után

$$(6) \quad \sqrt{2}g = \omega^2 \left(\frac{2}{3}l_2 - l_1 \right)$$

adódik. Ebből ω^2 -t kifejezve és az (1)-(3) összefüggéseket is felhasználva (5)-be helyettesítés után a

$$(7) \quad 7l_2^2 - 10l_1l_2 - 5l_1^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, amely (l_1^2 -tel osztva) a pálcák hosszának keresett arányára egy másodfokú egyenlet. A számunkra érdekes pozitív gyök

$$(8) \quad \frac{l_2}{l_1} = \frac{5 + \sqrt{60}}{7} \approx 1,82,$$

s ebből (6) felhasználásával $\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2l_2 - 3l_1}} \approx \frac{8,05}{\sqrt{l_1}},$

(amennyiben l_1 -t méterben mérjük).

Bárász Mihály (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot a motorhoz rögzített inerciarendszerben! Ebben a koordináta-rendszerben nem kell számolnunk tehetetlenségi erőkkal, viszont a pálcák (merev testek) mozgásegyenletei bonyolultabbak, mint az egyensúlyi egyenletek. Gyakorlás kedvéért oldjuk meg az I. megoldásban szereplő egyszerűbb feladatot (lásd az *1. ábrát*) inerciarendszerből is. Az m_1 tömegű, l_1 hosszú, ω szögsebességgel forgó pálca gyorsulása vízszintes irányú, nagysága

$$a = \frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2.$$

A pálca mozgásegyenletei, a Newton-egyenletek (a *4. ábra* jelöléseit követve):

$$(9) \quad F_2 + K = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2,$$

$$(10) \quad F_1 - m_1g = 0.$$

A pálcára ható külső erőknek nem nulla a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatéka, hanem (az óramutató járásával megegyező körülférési irányt tekintve pozitívnak)

$$(11) \quad M = (F_1 - F_2 + K) \frac{l_1}{2\sqrt{2}}$$

nagyságú. Célszerű a forgatónyomatékot $\mathbf{M}$ vektornak tekinteni, melynek nagysága M , iránya pedig (az erők támadáspontjába mutató helyvektorok és az erők vektoriális szorzatának megfelelően) a papír síkjába befelé mutat. A merev testek forgómozgásának alapegyenlete:

$$(12) \quad \mathbf{M} = \frac{\Delta \mathbf{N}}{\Delta t},$$

ahol $\mathbf{N}$ a merev test perdületének (más néven impulzusnyomatékának) vektora, s a fenti egyenlet jobb oldalán ezen vektor változási sebessége (egységnyi idő alatti megváltozása) szerepel.

Hogyan lehet kiszámítani egy test perdületét? Tudjuk, hogy az egész test ω szögsebességgel forog egy függőleges tengely körül, tehát a tömegközéppontja körüli forgását is egy (függőlegesen felfelé mutató) ω vektorral jellemezhető. A merev testek perdülete bizonyos esetekben (bizonyos irányú szögsebességnél) olyan vektor, amely párhuzamos a szögsebesség vektorával, és a nagysága az

$$(13) \quad N = \Theta \omega$$

összefüggésből számítható ki. A Θ tehetetlenségi nyomaték a testre és a forgástengely irányára jellemző mennyiség. Egy m tömegű, l hosszú, r sugarú homogén hengernél például $\Theta_1 = mr^2/2$ a szimmetriatengelyre vonatkoztatva, az erre merőleges tengelyre pedig (ha az átmegy a tömegközépponton): $\Theta_2 = m(l^2 + 3r^2)/12$. Vékony, hosszú pálcáknál, amilyen a feladatunkban is szerepel, $r \ll l$ miatt $\Theta_1 \ll \Theta_2 \approx ml^2/12$.

Jelen esetben a szögsebesség vektora se nem párhuzamos a pálcá szimmetriatengelyével, se nem merőleges arra, hanem mindkettővel 45° -os szöget zár be. Milyen irányú és milyen nagyságú ilyenkor a perdületvektor? Bontsuk fel a szögsebességet a 5. ábrán látható módon két összetevőre. A pálcára merőleges komponens nagysága $\omega/\sqrt{2}$, az ennek megfelelő perdület tehát

$$(14) \quad N = \Theta_2 \frac{\omega}{\sqrt{2}}.$$

A másik szögsebesség-komponens elhanyagolhatóan kicsiny tehetetlenségi nyomatékkal szorzódik, tehát ahhoz nem társítható számottevő nagyságú perdület. Az eredő impulzusnyomaték vektor tehát minden pillanatban merőleges a pálcá szimmetriatengelyére, s emiatt a pálcával együtt ω szögsebességgel forog egy függőleges tengely körül. (Vegyük észre, hogy $\mathbf{N}$ iránya most *nem párhuzamos* a szögsebesség vektor irányával!) Mivel a perdület vektora egy $N/\sqrt{2}$ sugarú vízszintes kör mentén ω szögsebességgel forog, az egységnyi időre eső megváltozása

$$(15) \quad \left| \frac{\Delta \mathbf{N}}{\Delta t} \right| = \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \omega = \frac{\Theta_2 \omega^2}{2} = \frac{1}{12} m_1 l^2 \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

iránya pedig az ábra síkjába befelé mutat. A pálcá forgásának egyenlete tehát (11) és (12) felhasználásával:

$$(16) \quad (F_1 - F_2 + K) \frac{l_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{24} m_1 l^2 \cdot \omega^2.$$

A (9), (10) és (16) egyenletek már egyértelműen meghatározzák a pálcára ható erőket, s ha például K -t kiszámítjuk, éppen az I. megoldásban más módszerrel megkapott formulához jutunk.

Megjegyezzük, hogy a fenti eljárás csak akkor alkalmazható, ha a szögsebességet a merev test úgynevezett fő tehetetlenségi tengelyei szerint bontjuk összetevőkre. Ezeket a tengelyeket általában nem könnyű elemi úton megtalálni; szerencsére fennáll az, hogy szimmetrikus tömegeloszlásoknál a fő tengelyek a test szimmetriatengelyeivel esnek egybe. Vigyáznunk kell még arra is, hogy a forgási egyenleteinket a tömegközéppontra vonatkoztassuk. Általános tengelyre vonatkozó forgási egyenlet felírása, ha nem kellő körültekintéssel tesszük, könnyen hibás eredményre vezethet (mint arról részletesen írtunk 1993. évi 5. számunkban | A Szerk.).

Ennyi előtanulmány után már nem túl nehéz a két pálcából álló rendszer mozgásegyenleteinek felírása sem. A 6. ábrán a testekre ható függőleges erőket a függőleges irányú gyorsulás hiányának megfelelően vettük fel. A vízszintes erőket az egyes pálcák tömegközépponti mozgásegyenletéből számíthatjuk ki:

$$(17) \quad F_1 = m_2 \left(l_1 - \frac{l_2}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2,$$

$$\text{illetve} (18) \quad F_2 - F_1 = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2.$$

Ha ezekből kifejezzük F_1 -t és F_2 -t, s ezeket a perdületváltozás és a (tömegközéppontokra vonatkoztatott) forgatónyomatékok közötti kapcsolat egyenleteibe helyettesítjük:

$$(19) \quad (m_2 g + F_1) \frac{l_2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

(a forgatónyomatékok előjelénél figyelembe vettük, hogy a perdület vektorának változása az ábra síkjából kifelé mutat), továbbá

$$(20) \quad (F_1 + F_2 - m_1 g - 2m_2 g) \frac{l_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \cdot \frac{\omega^2}{2},$$

ahonnan algebrai átalakítások után megkapjuk az I. megoldásban adódott l_1/l_2 hosszarányt, illetve a motor fordulatszámát.

Németh Tibor (Győr, Révai M. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján







