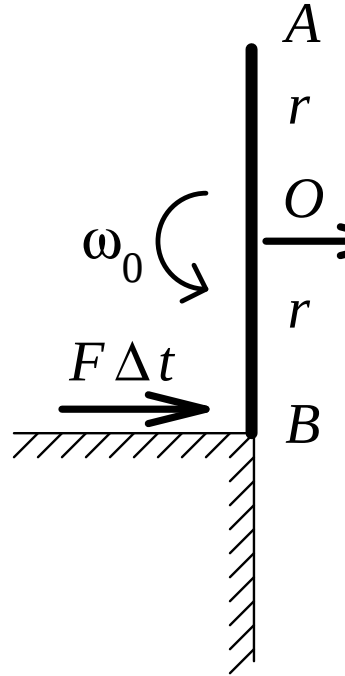


Jelöljük a pálca fele hosszúságát r -rel, tömegközéppontját O -val, végpontjait pedig A -val, illetve B -vel (1. ábra). Az alsó végét rövid Δt ideig tartó F erővel megütve $F \cdot \Delta t$ impulzust adunk át a pálcának, amelynek hatására a tömegközép-



pontja v_0 sebességgel kezd mozogni. Newton II. törvénye szerint

1. ábra

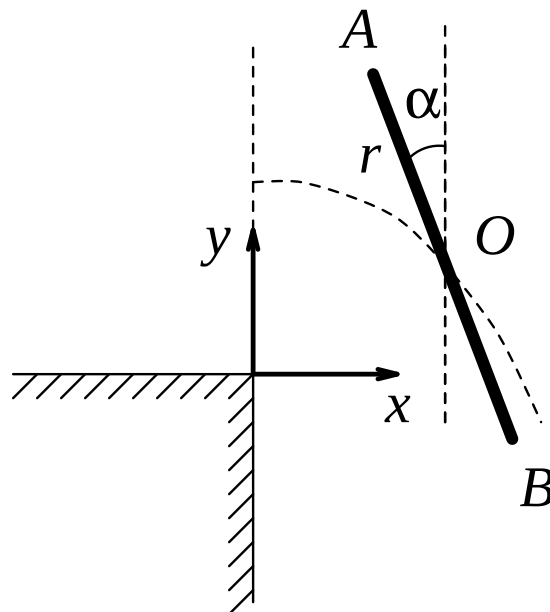
$$(1) \quad \Delta I = F \Delta t = m \cdot \Delta v = m v_0,$$

ahol m a pálca tömege. Az erőlködés nemcsak lendületet, hanem (a tömegközéppontra vonatkoztatva) perdületet is ad a pálcának. Az $F \cdot r$ forgatónyomaték Δt idő alatt

$$(2) \quad \Delta N = F \cdot r \cdot \Delta t = \Theta \cdot \Delta \omega = \frac{1}{3} m r^2 \cdot \omega_0$$

lendületváltozást okoz, ahol ω_0 a pálca szögsebessége az ütés után. (Feltételezzük, hogy a pálca tömegeloszlása homogén, s emiatt a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = m(2r)^2/12 = mr^2/3$.) Az (1) és (2) egyenleteket összevetve azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad r \omega_0 = 3 v_0.$$



2. ábra

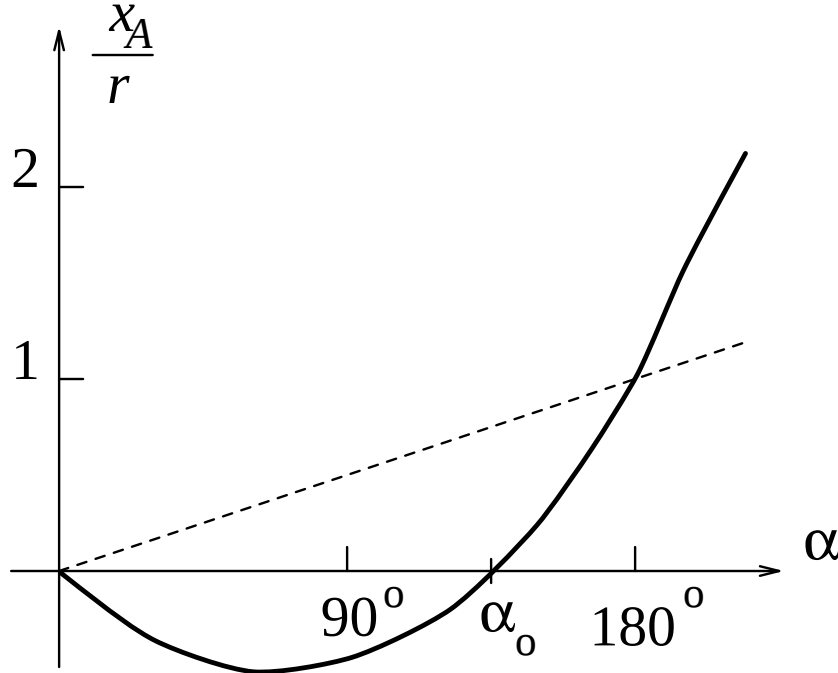
A továbbiakban a pálca a tömegközéppontja v_0 kezdősebességű vízszintes hajításnak megfelelő mozgást végez, a pálca egésze pedig ω_0 (állandó) szögsebességgel forog a tömegközéppont körül.

Írjuk le a pálca A pontjának mozgását az asztal széléhez rögzített koordináta-rendszerben:

$$x_A(t) = v_0 t - r \sin \alpha, (4) y_A(t) = r - \frac{g}{2} t^2 + r \cos \alpha, (5)$$

ahol $\alpha = \omega_0 t$. Fejezzük ki (3) segítségével v_0 -t ω_0 -lal, illetve írjuk le a mozgást az idő helyett a vele arányos α szög segítségével:

$$x_A(\alpha) = r \left(\frac{1}{3} \alpha - \sin \alpha \right), (6) y_A(\alpha) = r (1 + \cos \alpha) - \frac{g}{18} \frac{r^2 \alpha^2}{v_0^2}. (7)$$



3. ábra

Az $x_A(\alpha)$ függvényt ábrázolva (3. ábra) láthatjuk, hogy kezdetben az A pont az asztal fölött található ($x_A < 0$), egy bizonyos α_0 szögelfordulásnál éppen az asztal széle fölött lesz, utána pedig már mindig az asztaltól jobbra. Az α_0 kritikus értéket a (6) egyenletből határozhatjuk meg numerikusan: $\alpha_0 \approx 2,28$ radián $\approx 130,6^\circ$.

Ha az $\alpha = \alpha_0$ szögelfordulásnak megfelelő pillanatig az A pont még az asztal síkja fölött található (vagyis $y_A(\alpha_0) > 0$), akkor a továbbiakban az A pont már biztosan nem ütközhet az asztalnak. Belátható, hogy ebben az esetben a pálca más pontja sem ütközhet az asztalnak. A keresett feltétel tehát (7) alapján

$$v_0^2 > \frac{gr}{18} \cdot \frac{\alpha_0}{1 + \cos \alpha_0}.$$

A pálca B pontjának kezdősebessége tehát legalább

$$v_B = v_0 + r\omega_0 = 4v_0 = \sqrt{\frac{8}{9} gr \frac{\alpha_0^2}{1 + \cos \alpha_0}} = 4\sqrt{gr} \sin \frac{\alpha_0}{2} \approx 3,6\sqrt{gr}$$

nagyságú kell legyen. (Ez 40 cm hosszú pálcánál kb. 5 m/s sebességnek felel meg.)

Elek Péter (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A pálca tömegközéppontjának sebessége és a szögsebesség közötti (3) összefüggést a perdület-megmaradás tételéből is megkaphatjuk. A B pontban ható erőnek nincs forgatónyomatéka erre a pontra, tehát a pálca összes impulzusnyomatéka, vagyis a haladó mozgásból származó $mv_0 r$ és a forgásból adódó $-mr^2\omega_0^2/3$ összege a kezdeti nulla értékkel egyenlő kell maradjon.

Varga Dezső (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o.t.)

2. A kritikus α_0 szögelfordulást megadó $\alpha = 3 \sin \alpha$ transzcendens egyenletet egy zsebszámológéppel is könnyen és gyorsan megoldhatjuk az $\alpha_{n+1} = \sin \alpha_n + (2/3)\alpha_n$ iterációs képlet segítségével. Az $\alpha_1 = 2$ kezdőértékből, mint durva közelítésből kiindulva néhány iteráció után $\alpha_0 = 2,278\,862\,66$ értéket kapunk, ami | a fizikai feladat igényeit messze meghaladó pontossággal | kielégíti az $\alpha = 3 \sin \alpha$ egyenletet.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.)