Mivel a rendszerre külső erő nem hat, az ütközésre teljesül az impulzusmegmaradás tétele. Az elektron tömege mintegy 2000-szer kisebb a proton tömegénél, ezért a következőkben elhagyjuk, az $m_p = m_H$ közelítést használjuk.

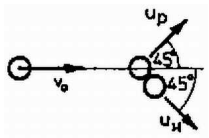
Az impulzusmegmaradás alakja:

$$m\vec{v}_0 = m\left(\vec{u}_p + \vec{u}_H\right).$$

a) Ha csak azt követeljük meg, hogy a sebességek nagysága legyen azonos, akkor ezt tetszőleges v_0 esetén ki tudjuk elégíteni, mert az energiamegmaradás is teljesülhet:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(|\vec{u}_p|^2 + |\vec{u}_H|^2\right) = mu^2 \quad (|\vec{u}_p| = |\vec{u}_H| = u),$$

tehát $u = v_0/\sqrt{2}$, azaz a proton és a hidrogénatom a bejövő proton irányához képest 45°-ban repül ki. Ez teljesülhet, csak megfelelően kell ütköztetni őket (lásd az *ábrát*). Ha tehát csak azt akarjuk, hogy a sebességek nagysága legyen azonos, tetszőleges kis gyorsítófeszültséget alkalmazhatunk.



b) Ha a sebességvektorok egyenlőségét követeljük meg ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2$), akkor nyilván $\vec{u}_p = \vec{u}_H = \vec{v}_p/2$.

Ekkor viszont az energiamegmaradás csak úgy teljesülhet, ha a hidrogénmolekula gerjesztődik az ütközés során. Legyen a gerjesztés energiája ε. Így

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2\cdot\frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{4} + \varepsilon, \quad \text{azaz} \quad \varepsilon = \frac{mv_0^2}{4}.$$

A gerjesztési energia akkor minimális, ha a hidrogénatom az alapállapotból ($n = 1$) az első gerjesztett állapotba ($n = 2$) kerül. Jelöljük ezt az energiát ε_{12}-vel. Nyugalmi helyzetből U feszültséggel gyorsított proton sebessége (nemrelativisztikus esetben) az

$$eU = \frac{1}{2}m_p v^2$$

egyenlőségből határozható meg. Így $2eU/m_p = v^2 \geqq 4\varepsilon_{12}/m_p$, tehát $U \geqq 2\varepsilon_{12}/e$. Felhasználva a Balmer-formulát

$$\varepsilon_{12} = \frac{m_e e^2}{8\varepsilon_0 h^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right), \qquad \text{innen} \qquad U \geqq 20,25\ \text{V}.$$

Tehát ebben az esetben legalább 20,25 V feszültséggel kell a protont gyorsítani.

Czirók András (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján.