

A foton energiája és hullámhossza közötti összefüggés:

$$(1) \quad E = h \cdot f,$$

ahol h a Planck-állandó, f a foton frekvenciája. Továbbá

$$(2) \quad c = \lambda f,$$

ahol c a fénysebesség, λ a hullámhossz. Az (1)–(2) összefüggésekből

$$(3) \quad \lambda = \frac{hc}{E} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

A foton és az elektron ütközése során teljesül a lendület és az energia megmaradásának tétele. Így – ha m az elektron tömege, v az ütközés utáni sebessége, E' a foton ütközés utáni energiája – akkor az energiatétel:

$$(4) \quad E = E' + \frac{1}{2}mv^2.$$

De Broglie összefüggése szerint egy részecske lendülete és hullámhossza közti összefüggés:

$$(5) \quad p\lambda = h.$$

Felhasználva, hogy egy foton energiája és lendülete között fennáll a

$$(6) \quad p = \frac{E}{c}$$

összefüggés, a lendületmegmaradás egyenlete:

$$(7) \quad \frac{E}{c} = mv - \frac{E'}{c}.$$

A (4)–(7) egyenletekből

$$(8) \quad 2E = mvc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v}{c} \right).$$

Ha $v \ll c$ (ezt eleve feltételeztük, amikor az elektron energiáját klasszikusan számoltuk), akkor

$$(9) \quad v = \frac{2E}{mc} = 5,8 \cdot 10^6 \text{ m/s}.$$

A relatív hullámhosszváltozás

$$(10) \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E}}{\frac{hc}{E}} = \frac{E - E'}{E'} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{E'} = 1,87\%.$$

Megjegyzés. Mivel v értéke, $5,8 \cdot 10^6 \text{ m/s}$ jóval kisebb a fénysebességnél, így jogos volt a klasszikus képletekkel számolnunk. Relativisztikusan számolva az egyenletek:

$$(11) \quad m_e c^2 + hf = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + hf',$$

$$(12) \quad \frac{hf}{c} = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{hf'}{c}.$$

A feladat az ún. Compton-effektus speciális esete, amelynek leírása megtalálható pl. *Holics L.: Fizika II. kötetének* 975. oldalán.