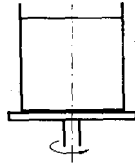
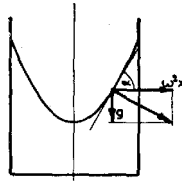


Egy nyugalomban lévő folyadék felszíne merőleges a rá ható erők eredőjére. A folyadékkal együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a folyadék nyugalomban van. A vízfelszín egységnyi tömegű darabjára az $\omega^2 x$ nagyságú centrifugális erő és a g nagyságú súlyerő hat, ahol a forgástengelytől mért távolságot x -szel, a víz szögsebességét ω -val jelöltük.



Ha az egyensúlyi felület érintőjének a vízszintessel bezárt szöge α , akkor az ábra alapján

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}.$$



Ugyanakkor $\operatorname{tg} \alpha$ a síkmetszet $y(x)$ görbéjének x pontbeli meredeksége x szerinti deriváltja, így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{g}.$$

Ismeretes, hogy az ilyen görbe parabola:

$$(1) \quad y(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0,$$

ahol y_0 a vízfelszín magassága a forgástengelynél. Másrészt tudjuk, hogy

$$(2) \quad y(R) = 2H.$$

A forgó folyadék térfogatát integrálással határozhatjuk meg. Bontsuk fel az R sugarat $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{R}{n}$ (egyszerűség kedvéért egyenlő) hosszúságú darabokra ($i = 1, 2, \dots, n$). A forgó folyadék térfogatát Δx_i vastagságú, $y(x_i)$ magasságú hengerhéjak térfogatösszegével, pontosabban a

$$\sum_{i=1}^n y(x_i) 2\pi x_i \Delta x_i$$

összeggel közelíthetjük; ennek határértéke $n \rightarrow \infty$ esetén az

$$\int_0^R y(x) 2\pi x \, dx$$

integrál adja meg a forgó folyadék térfogatát. (1) alapján

$$\int_0^R y(x) 2\pi x \, dx = \frac{\pi \omega^2}{g} \int_0^R x^3 \, dx + 2\pi y_0 \int_0^R x \, dx = \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g} + \pi y_0 R^2.$$

A folyadék térfogata állandó, ezért

$$\frac{\pi \omega^2 R^4}{4g} + \pi y_0 R^2 = \pi R^2 H,$$

így

$$(3) \quad \frac{\omega^2 R^2}{4g} + y_0 = H.$$

Az (1), (2) és (3) egyenlőségek összevetéséből

$$y_0 = 0, \quad \omega = \frac{2}{R} \sqrt{gH}, \quad y(x) = 2H \frac{x^2}{R^2},$$

tehát a forgástengelyben a víz magassága 0.

A sebesség a pohár falánál

$$v = R \cdot \omega = 2\sqrt{gH}.$$

A víz mozgási energiája szintén integrálással határozható meg:

$$E_{\text{kin}} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} 2\pi x_i \cdot \Delta x_i \cdot y(x_i) \cdot \varrho \cdot (x_i \omega)^2,$$

így

$$E_{\text{kin}} = \pi \varrho \omega^2 \int_0^R x^3 y(x) dx,$$

ahol $\varrho = \frac{M}{R^2 \pi H}$. Az integrált kiszámítva azt kapjuk, hogy

$$E_{\text{kin}} = \frac{4}{3} M g H.$$

Gyorsításkor legalább akkora munkát kell végeznünk, mint amekkora a víz energiájának a növekedése:

$$W_{\text{min}} = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{pot}}.$$

A mozgási energia változása $\frac{4}{3} M g H$. A helyzeti energia kezdetben $\frac{1}{2} M g H$ volt, a gyorsítás után pedig

$$E_{\text{pot}} = \sum_{i=1}^n m_i g h_i = \int g \frac{1}{2} y(x) \varrho dV.$$

Felhasználva $y(x)$, ϱ és dV kifejezéseit, azt kapjuk, hogy

$$E_{\text{pot}} = \frac{2}{3} M g H.$$

Tehát a minimális munkavégzés

$$W_{\text{min}} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) M g H = \frac{3}{2} M g H.$$

Ekkora munkát abban az esetben kellene végezni, ha minden veszteségtől (viszkózitás, pohár tömege, stb.) eltekintünk.