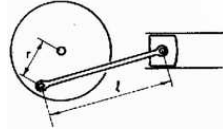


I. megoldás. A dugattyúnak a forgástengelytől mért x távolsága az 1. ábra alapján határozható meg:



1. ábra

$$(1) \quad x = r \cos \alpha + l \cos \beta.$$

Az n fordulatszámmal működő robbanómotor tengelyének szögsebessége $\omega = n\pi/30$, a szögelfordulás $\alpha = \omega t$. A szinusztétel alapján

$$(2) \quad r \sin \alpha = l \sin \beta.$$

Az (1) és (2) egyenletek alapján és α helyébe ωt -t helyettesítve a következő hely-idő összefüggést kapjuk:

$$(3) \quad x(t) = r \cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}.$$

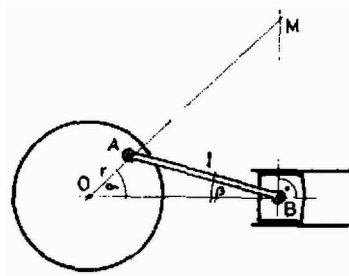
A sebesség-idő összefüggés a hely-idő összefüggés idő szerinti deriváltja, tehát

$$(4) \quad v(t) = x'(t) = -r\omega \sin(\omega t) - \frac{r^2\omega \sin(2\omega t)}{2\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}}.$$

A gyorsulás-idő összefüggés a sebesség-idő összefüggés idő szerinti deriváltja

$$(5) \quad a(t) = v'(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) - \frac{r^2\omega^2 \cos(2\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}} - \frac{[r^2\omega \sin(2\omega t)]^2}{4[l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)]^{3/2}}.$$

II. megoldás. A hely-idő összefüggést az I. megoldás szerint határozzuk meg. A sebesség kiszámításához keressük meg a hajtókar pillanatnyi forgáscentrumát, M -et, azaz azt a pontot, amely körül a hajtókar pillanatnyilag forgómozgást végez. Tudjuk, hogy M -ből a hajtókar pontjaiba húzott sugár merőleges az adott pontok sebességeire. A hajtókar A pontja O körüli körpályán mozog, B pontja pedig az OB egyenes mentén, ami alapján M megszerkeszthető (2. ábra).



2. ábra

Jelölje ω_1 a hajtókar M körüli forgásának szögsebességét! Ekkor a dugattyú sebessége, ami a hajtókar B pontjának sebességével egyenlő:

$$(6) \quad v(t) = \overline{BM} \cdot \omega_1.$$

Az ABM háromszögre felírt szinusztétel szerint

$$(7) \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

a hajtókar A pontjának sebességéből

$$(8) \quad \omega_1 = \frac{-r\omega}{\overline{AM}}.$$

A (6) egyenletbe a (7) és (8) összefüggéseket helyettesítve a (2) összefüggés felhasználásával a sebesség-idő összefüggés I. megoldás szerinti (4) alakját kapjuk.

A gyorsulás-idő összefüggés meghatározásához a hajtókar mozgását bontsuk fel a jobb oldali végpont mozgására, (amelynek sebessége v , gyorsulása a), valamint a hajtókar jobb oldali végpontja körüli forgómozgásra. Ez utóbbi forgómozgás szögsebességét jelölje ω_2 , szöggyorsulását β . A hajtókar bal oldali végpontjának függőleges sebességét kétféleképpen is felírhatjuk (az O , ill. a B pontok körüli forgómozgás alapján):

$$(9) \quad r\omega \cos \alpha = l\omega_2 \cos \beta.$$

Írjuk fel a bal oldali végpont gyorsulásának rúd irányú komponensét is kétféleképpen:

$$(10) \quad r\omega^2 \cos [180 - (\alpha + \beta)] = a \cos \beta + l\omega_2^2.$$

A (9), (10) összefüggésekből némi algebrai átalakítással a gyorsulás-idő összefüggés már ismert (5) alakja megkapható.

Megjegyzés. Tanulságos vizsgálni az $l \gg r$ esetet. Ekkor közelítőleg

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \omega t - \frac{r^2}{2l} \sin^2 \omega t + l, \\ v(t) &= -r\omega \sin \omega t - \frac{r^2\omega}{2l} \sin 2\omega t, \\ a(t) &= -r\omega^2 \cos \omega t - \frac{r^2\omega^2}{l} \cos 2\omega t, \end{aligned}$$

azaz megjelennek a kétszeres frekvenciájú felharmonikusok.