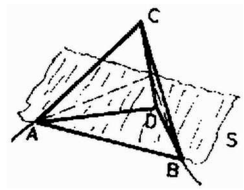
**I. megoldás.** Az ellenálláshálózatok eredő ellenállásának kiszámításánál nagyon sokat segít, ha megkeressük az ekvipotenciális pontokat. Ezek a pontok ellenállás nélküli vezetékkel összeköthetők, azaz egybeejthetők, így az eredő ellenállás kiszámításához nagyon gyakran nincs szükség másra, mint a sorosan , illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítására.

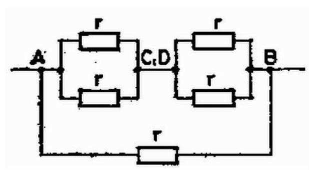
Mivel a szabályos testek minden éle azonos ellenállású, ezért a geometriai szimmetriák a potenciáltérkép szempontjából is léteznek: a testnek az áram be- és kivezetési pontjára (az ábrákon ezeket $A$ és $B$ jelöli) illeszkedő szimmetria síkja azonos potenciálú tükörképi pontokat választ el.




*1. ábra*

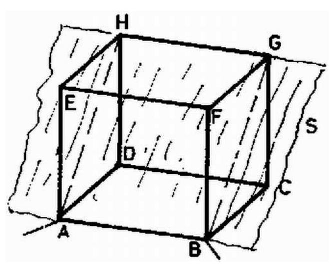
*a)* Tetraéder esetén (1. ábra) a $C$ és $D$ pontok tükörképei egymásnak az $AB$-re illeszkedő $S$ szimmetriasíkra nézve, így ekvipotenciálisak. A kapcsolást átrajzolva (2. ábra) az eredő ellenállás könnyen kiszámítható:

$$R_{tetraéder} = \frac{r}{2}.$$

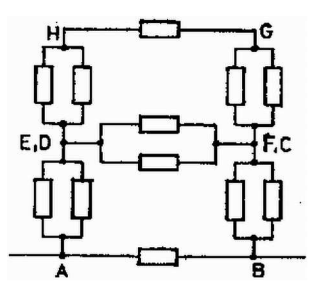



*2. ábra*

*b)* Kockánál az $S$ szimmetriasík az $A$, $B$, $G$ és $H$ pontokon megy keresztül. Így az $E$ és $D$, illetve $F$ és $C$ pontok ekvipotenciálisak (3. ábra).



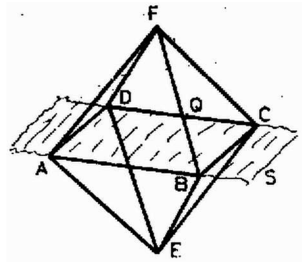

*3. ábra*




*4. ábra*

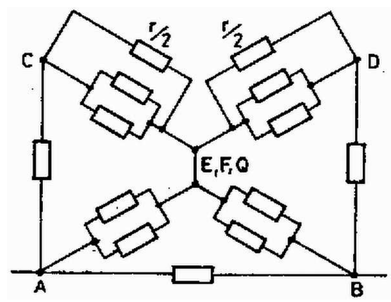
Az átrajzolt hálózat (4. ábra) eredő ellenállása

$$R_{kocka} = \frac{7}{12}r.$$




*5. ábra*

*c)* Oktaédernél a szimmetriasík az $ABCD$ sík (5. ábra). Itt $E$ és $F$ ekvipotenciális. A hálózat rajzánál (6. ábra) figyelembe vettük, hogy a $CD$ él $Q$ felezőpontja is ekvipotenciális az $E$ és $F$ pontokkal.




*6. ábra*

Az eredő ellenállás:

$$R_{oktaéder} = \frac{5}{12} r.$$

Hasonló geometriai megfontolások és egyszerű számítások után megkaphatjuk, hogy

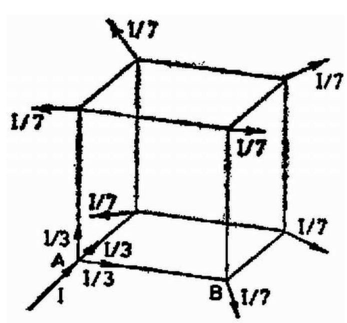
$$R_{dodekaéder} = \frac{19}{30} r,$$

illetve

$$R_{ikozaéder} = \frac{11}{30} r.$$

*Tóth Ildikó* (Sárvár, Tinódi S. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

**II. megoldás.** Valamennyi poliéder esetén egyszerre megadhatjuk a választ, ha kihasználjuk a feladat nagyfokú szimmetriáját, nevezetesen azt, hogy a szabályos poliéderek egyik pontja sincs kitüntetve a többi csúcshoz képest, illetve, hogy mindegyik él ugyanakkora ellenállással rendelkezik.




*7. ábra*

Jelöljük a csúcsok számát $N$-nel, az egyes csúcsokba futó élek számát $K$-val (kocka esetén pl. $N = 8, K = 3$). Vezessünk a hálózat $A$ pontjába $I$ erősségű áramot (7. ábra). A többi csúcsból vezessünk el $\dfrac{I}{N-1}$ erősségű áramot, hogy a töltésmegmaradást kifejező Kirchhoff-törvény teljesüljön. Az $A$ ponttal szomszédos csúcsok szimmetrikus szerepe miatt mindegyikük felé $I/K$ erősségű áram folyik, így az $A$ és $B$ pont között a feszültség $\dfrac{Ir}{K}$.

Ismételjük meg az eljárást most oly módon, hogy a $B$ pontnál kivezetünk $I$ áramot, az összes többi csúcsnál pedig $\dfrac{I}{N-1}$ áramot vezetünk a hálózatba. Ekkor az $A$ és $B$ pont között most is $\dfrac{Ir}{K}$ lesz a feszültség.

Szuperponáljuk egymásra a két árameloszlást (az Ohm-törvény linearitása miatt ezt megtehetjük). Ekkor az $A$ és $B$ pontok között

$$U=\frac{Ir}{K}+\frac{Ir}{K}=\frac{2Ir}{K}$$

a feszültség, a teljes átfolyó áramerősség

$$I_e=I+\frac{I}{N-1}=\frac{N}{N-1}I.$$

és a szuperpozíció miatt az $A$ és $B$ csúcsok kivételével sehol sem folyik ki – vagy be – áram a hálózatba. Így az eredő ellenállás:

$$R=\frac{U}{I_e}=\frac{2(N-1)}{N\cdot K}r.$$

Az öt szabályos poliéderre tehát:

| | $N$ | $K$ | $R_e$ |
|---|---|---|---|
| tetraéder | 4 | 3 | $r/2$, |
| kocka | 8 | 3 | $7r/12$, |
| oktaéder | 6 | 4 | $5r/12$, |
| dodekaéder | 20 | 3 | $19r/30$, |
| ikozaéder | 12 | 5 | $11r/30$. |

*Hauer Tamás* (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.)