

Az abroncs a mozgásának első szakaszában csúszva gördül, majd amikor a súlypontjának sebessége megegyezik a súlypont körüli körmozgásból származó kerületi sebességgel, tiszta gördüléssel mozog tovább.

Legyen az abroncs súlypontjának távolsága a lejtő tetejétől x ! Ekkor a feladatnak megfelelően változó súrlódási együttható:

$$(1) \quad \mu(x) = \frac{x}{l},$$

ahol $l = 1$ m, a lejtő teljes hossza.

1988-12-465-1.eps

1. ábra

Írjuk fel a csúszva gördülés esetén érvényes mozgásegyenleteket! (1. ábra)

$$(2) \quad mg \sin \alpha - S = ma,$$

$$(3) \quad N = mg \cos \alpha,$$

$$(4) \quad SR = \Theta \beta,$$

ahol a súrlódási erő:

$$(5) \quad S = \mu(x)N,$$

az abroncs tehetetlenségi nyomatéka

$$(6) \quad \Theta = m \cdot R^2,$$

R az abroncs sugara, m pedig a tömege; α a lejtő szöge.

Az (1), (3), (5) és (6) egyenlet segítségével (2) az alábbiakra hozható:

$$(7) \quad a = g \sin \alpha - \frac{x}{l} g \cos \alpha.$$

Vezessük be az $y = x - l \operatorname{tg} \alpha$ új változót! (Ez mindössze a koordinátarendszer kezdőpontjának eltolását jelenti, a gyorsulást nem változtatja meg.)

Az új mozgásegyenlet

$$(8) \quad a = -\frac{g \cos \alpha}{l} y,$$

amely pontosan olyan alakú (a gyorsulás arányos a „kitéréssel” és vele ellentétes irányú), mint amilyen a harmonikus rezgőmozgásra jellemző. A körfrekvencia (melyet most az abroncs szögsebességétől megkülönböztetve λ -val fogunk jelölni):

$$(9) \quad \lambda = \sqrt{\frac{g \cos \alpha}{l}}.$$

A rezgőmozgást leíró $y(t)$ függvény adatait (paramétereit) úgy kell megválasztanunk, hogy a $t = 0$ időpillanatban a sebesség nulla, a kitérés pedig az $x = 0$ -nak megfelelő $y = -l \operatorname{tg} \alpha$ legyen. Ezeknek a feltételeknek

$$y(t) = -l \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \lambda t$$

tesz eleget. Az abroncs mozgását leíró (7) egyenlet megoldása tehát

$$(10) \quad x(t) = l \operatorname{tg} \alpha (1 - \cos \lambda t),$$

$$(11) \quad v(t) = l(\operatorname{tg} \alpha) \lambda \sin \lambda t.$$

A továbbiakban a súlypont körüli forgómozgást vizsgáljuk. A (4)–(6) és (10) egyenlet alapján:

$$(12) \quad \beta(t) = \frac{x(t) \cdot g \cos \alpha}{l \cdot R} = \frac{g \sin \alpha}{R} (1 - \cos \lambda t).$$

Könnyen belátható, hogy a súlypont körüli forgás szögsebessége:

$$(13) \quad \omega(t) = \frac{g \sin \alpha}{R} \left(t - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t \right).$$

(Az $\omega(t)$ függvény deriváltja éppen a fenti $\beta(t)$ függvényt adja.)

Az eddigi eredmények a csúszva gördülés esetére vonatkoznak. Az abroncs abban a t_0 pillanatban kezd el tisztán gördülni, amikor $v(t_0) = \omega(t_0) \cdot R$.

A (11) és (13) összefüggést felhasználva t_0 -ra adódó egyenlet:

$$(14) \quad 2 \sin \lambda t_0 = \lambda t_0.$$

Ezt nem lehet elemi úton megoldani, numerikus módszerrel a gyöke:

$$\lambda t_0 = \eta \approx 1,89.$$

A fenti gyököt a (10) egyenletbe helyettesítve megkapjuk azt az x_0 távolságot, ahonnan az abroncs tisztán fog gördülni:

$$(15) \quad x_0 = l \operatorname{tg} \alpha (1 + \sqrt{1 - (\eta/2)^2}) \approx 1,32 \cdot l \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0,48 \text{ m}.$$

Innen a súrlódási erő nem végez munkát az abroncson, így a mozgás során teljesül a mechanikai energiamegmaradás törvénye:

$$(16) \quad \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega_0^2 + m g (l - x_0) \sin \alpha = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2.$$

Az egyenlet bal oldalának első tagja a haladó mozgás, a második a forgómozgás energiája a tiszta gördülés kezdetén, az utolsó tagja pedig a helyzeti energia megváltozása, amíg a test a lejtő aljára nem ér, ahol a sebessége v , szögsebessége ω lesz. Mivel tiszta gördülésről van szó, a $v = \omega R$ feltétel teljesül. Θ (6)-beli értékét a (16) egyenletbe írva az abroncs végsebessége:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g(l - x_0) \sin \alpha}.$$

A t_0 -beli sebességet a (11) egyenletből kapjuk:

$$v_0 = l(\operatorname{tg} \alpha) \lambda \sin \lambda t_0 = \frac{\eta}{2} (g l \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha)^{1/2}.$$

Ezt behelyettesítve a lejtő alján az abroncs sebessége:

$$v = \left\{ g l \sin \alpha \left[1 - \operatorname{tg} \alpha (1 - (\eta/2)^2 + \sqrt{1 - (\eta/2)^2}) \right] \right\}^{1/2} \approx \\ \approx [g l \sin \alpha (1 - 0,42 \operatorname{tg} \alpha)]^{1/2} = 1,69 \text{ m/s}.$$

Bodrogi Péter (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., II. o .t.)

Megjegyzés. Ha felírjuk a tiszta gördülésre vonatkozó mozgásegyenleteket és kényszerfeltételeket, akkor az (1) – (4), (6) egyenletek változatlanul maradnak, az (5) helyébe pedig az $a = \beta R$ kényszerfeltétel kerül. Az egyenletrendszerből $a = \frac{1}{2} g \sin \alpha$ és $S = m a = \frac{1}{2} m g \sin \alpha$; a gördülés feltételeként μ -re tehát azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \leq \mu(x)$, azaz

$$x \geq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha = x_h.$$

A (15) eredmény szerint a tiszta gördülés valójában jóval x_h után kezdődik, mert a tapadásnak az $S \leq \mu N$ egyenlőtlenség csak szükséges, de nem elégséges feltétele. Sok megoldó megelégedett erről, és így hibás eredményre jutott.

1988-12-465-2.eps

2. ábra

Ha felrajzoljuk a helyes megoldás segítségével az abroncs sebességének és gyorsulásának idő-függését (2. ábra) (pl. Tóth Ildikó számítógépes programja alapján, vagy a (8), (10) és (11) egyenletekkel analitikusan adjuk meg a görbéket), akkor látható, hogy a gyorsulás-függvénynek a t_0 pontban ugrása van, a hibás eredmény pedig az ábrán berajzolt szaggatott vonalnak a csúszva gördülést meghatározó gyorsulásgörbe t_h -beli metszéspontja alapján adódik.