

Legyen a rendszer helyzetét jellemző változó az 1. ábrán látható α szög.

1988-11-416-2.eps

1. ábra

Határozzuk meg először az egyensúlyi helyzetet megadó α_0 szöget! A fonalat mg erő feszíti, ennek érintő irányú összetevője, $mg \cos \alpha_0$ egyensúlyt kell tartson az Mg súlyerő $Mg \cos 2\alpha_0$ érintőleges komponensével.

$$(1) \quad Mg \cos 2\alpha = mg \cos \alpha_0,$$

ami némi átalakítás után a

$$2M \cos^2 \alpha_0 - m \cos \alpha_0 - M = 0$$

másodfokú egyenletté alakítható. Ennek megoldása

$$(2) \quad \cos \alpha_0 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 8M^2}}{4M},$$

(a másik gyök a feladat szempontjából érdektelen). Az egyensúly nyilvánvalóan csak úgy állhat fenn, ha $m < M$.

Feladatunk az egyensúlyi helyzet körüli kis amplitúdójú rezgések periódusidejének meghatározása. Térítsük ki a rendszert az egyensúlyi helyzetéből $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon$ szögnek megfelelő helyzetbe ($\varepsilon \ll 1$), majd kezdősebesség nélkül engedjük el. Feltevésünk szerint az α szög a harmonikus rezgőmozgás képletei szerint változik $T = 2\pi/\omega$ periódusidővel:

$$\alpha = \alpha_0 + \varepsilon \cos \omega t.$$

Az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában a legnagyobb az α szög változási sebessége

$$\left. \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \right|_{\max} = \varepsilon \cdot \omega,$$

s ezzel együtt a M tömegű test $V = R \frac{\Delta(2\alpha)}{\Delta t}$ sebessége is akkor a legnagyobb,

$$V_{\max} = 2R\omega \cdot \varepsilon.$$

1988-11-416-3.eps

2. ábra

A m tömegű test sebessége a 2. ábra szerint az egyensúlyi helyzet közelében

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta y \cdot \cos \alpha}{\Delta t} = V_{\max} \cdot \cos \alpha_0 = 2R\omega \varepsilon \cos \alpha_0.$$

A rendszer teljes mozgási energiája az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában

$$(3) \quad E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}M(2R\omega\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}m(2R\omega\varepsilon \cos \alpha_0)^2.$$

Számítsuk most ki a rendszer helyzeti energiáját a legnagyobb kitérésnél; az energia nullpontját az egyensúlyi helyzethez rögzítjük. Mivel a m tömegű test emelkedése a fonal nyújthatatlansága miatt

$$\Delta x = 2R[\sin(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin \alpha_0],$$

a helyzeti energia

$$(4) \quad E_{\text{helyz}} = mg \cdot 2R[\sin(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin \alpha_0] - MgR[\sin 2(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin 2\alpha_0].$$

Mivel a súrlódás elhanyagolható, a legnagyobb kitéréshez tartozó helyzeti energiának meg kell egyeznie az egyensúlyi helyzeten való áthaladás pillanatában észlelhető maximális mozgási energiával. (3) és (4) összevetéséből

$$(5) \quad 2(M + m \cos^2 \alpha_0)R \cdot \omega^2 \cdot \varepsilon^2 = 2mg[\sin(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin \alpha_0] - MgR[\sin(2\alpha_0 + 2\varepsilon) - \sin 2\alpha_0].$$

A szögletes zárójelben álló kifejezések az addíciós tétel és a kis szögekre érvényes $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ összefüggés felhasználásával

$$\begin{aligned}\sin(\alpha_0 + \varepsilon) - \sin \alpha_0 &= (\cos \varepsilon - 1) \sin \alpha_0 + \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha_0 = \\ &= -2 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin \alpha_0 + \sin \varepsilon \cdot \cos \alpha_0 \approx \varepsilon \cdot \cos \alpha_0 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin \alpha_0,\end{aligned}$$

illetve

$$\sin(2\alpha_0 + 2\varepsilon_0) - \sin 2\alpha_0 \approx 2\varepsilon \cos 2\alpha_0 - 2\varepsilon^2 \cdot \sin 2\alpha_0.$$

Tekintettel az (1) egyensúlyi feltételre (5) jobb oldalán az ε -nal arányos tagok kiesnek, így mindkét oldalt ε^2 -tel végigosztva az ω -ból kiszámítható periódusidő:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2R}{g} \cdot \frac{M + m \cos^2 \alpha_0}{2M \sin 2\alpha_0 - m \sin \alpha_0}},$$

ahol

$$\alpha_0 = \arccos \left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 8M^2}}{4M} \right).$$

Ha $m \ll M$, akkor $\alpha_0 \approx 45^\circ$ és $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ az R hosszúságú fonálinga lengésideje. Általában T az m/M tömegarány függvényében a 3. ábrán látható módon változik.

1988-11-417-1.eps

3. ábra

Megjegyzés. Sok megoldó nem vette észre, hogy a két test különböző gyorsulással mozog, és emiatt hibás eredményt kaptak.