

Helyezzük a fényforrást az Oz tengely egy rögzített S pontjába! Tekintsünk egy fénysugarat, amelyik az A pontban lép a félgömbbe! Ez a pont jellemezhető az 1. ábrán látható φ szöggel.

1988-04-183-3.eps

1. ábra

A δ beesési szög

$$\delta = \varphi + \alpha.$$

A törési törvényből

$$\frac{\sin \delta}{\sin \beta} = n.$$

Ez a fénysugár érinteni fogja az O középpontú, $\varrho = R \sin \beta$ sugarú kört.

Tekintsünk most két fénysugarat (2. ábra)!

1988-04-184-1.eps

2. ábra

Ha $\varphi < \varphi'$, akkor $\alpha < \alpha'$ és így $\delta < \delta'$. Ekkor a törési törvényből $\beta < \beta'$ következik. A második fénysugár így nagyobb $\varrho' = R \sin \beta'$ sugarú kört érint. Ez esetben az AB és $A'B'$ nem metszheti egymást a félgömb belsejében, amiből rögtön következik, hogy $OB < OB'$.

Következésképpen rögzített S mellett φ -t a lehető legnagyobbra kell választani. Ez akkor teljesül, ha az S -ből induló fénysugár éppen érinti a félgömböt. Ez esetben

$$(1) \quad \delta = 90^\circ;$$

valamint a törési törvény alapján

$$(2) \quad \sin \beta = \frac{1}{n}.$$

Írjuk fel a szinusztételt az OBA háromszögre!

$$(3) \quad \frac{OB}{R} = \frac{\sin \beta}{\sin[180 - \beta - (90 - \varphi)]} = \frac{\sin \beta}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

Ez az összefüggés adja meg, rögzített S mellett, az alaplapon megvilágított kör OB sugarát.

Ha azt vizsgáljuk, hogy OB mely helyzetű S pont esetén lesz minimális, akkor ez megfelel annak, ha φ -t változtatjuk $\delta = 90^\circ$ mellett. (3) alapján OB minimális, ha $\cos(\beta - \varphi)$ maximális, vagyis $\beta = \varphi$. Innen rögtön adódik (2) felhasználásával, hogy:

$$(4) \quad OB = R \sin \beta = \frac{R}{n}.$$

A fényforrás helyzete $\beta = \varphi$, $\delta = 90^\circ$ esetén:

$$(5) \quad OS = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{R}{\cos \beta} = \frac{r}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{Rn}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Összefoglalva: Az alaplapon lévő kör területe minimális, ha OS az (5)-nek megfelelő érték, a keresett terület pedig:

$$T_{\min} = \frac{R^2 \cdot \pi}{n^2}.$$