

A lejtőn súrlódással lecsúszó test gyorsulása: $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, ahol α a lejtő szöge. A lecsúszás ideje:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}},$$

ahol

$$l = \frac{d}{\cos \alpha}$$

a lejtő hossza, így az idő

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}.$$

Ennek értéke α függvényében akkor minimális, ha $g(\alpha) \equiv \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$ értéke maximális. Mivel

$$g(\alpha) = \cos^2 \alpha (\operatorname{tg} \alpha - \mu) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

tulajdonképpen az $f(x) \equiv \frac{x - \mu}{1 + x^2}$ függvény maximumát kell megkeresnünk. (Kihasználtuk, hogy az $x = \operatorname{tg} \alpha$ függvény szigorúan monoton növekvő a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban.)

Vezessük be az $x = \mu + y$ jelölést, ezzel

$$\frac{x - \mu}{1 + x^2} = \frac{y}{1 + y^2 + 2\mu y + \mu^2} = \frac{1}{2\mu + \frac{1 + \mu^2}{y} + y}.$$

Ennek a függvénynek ott van a maximuma, ahol a nevezőben szereplő $y + \frac{1 + \mu^2}{y}$ kifejezés minimális, vagyis $y = \sqrt{1 + \mu^2}$ értéknél (ld. a számtani és a mértani közép vonatkozó $c/y + y \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{c}{y} \cdot y} = 2\sqrt{c}$ egyenlőtlenségét).

Így tehát a legrövidebb lecsúszási időt azon α szögnél kapjuk, melyre

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu + \sqrt{1 + \mu^2},$$

vagyis amikor a lejtő magassága

$$h = d \cdot (\mu + \sqrt{1 + \mu^2}).$$

Csordás Zoltán Mihály (Esztergom, Dobó K. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján