

1. a) A leesés közben teljesül az energiamegmaradás törvénye, azaz (rögzített kocsinál):

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 = mgh + mgR \sin \alpha,$$

ahol α a test helyzetét jelző szög (1. ábra).

1988-01-044-1.eps

1. ábra

A körmozgás feltétele:

$$(2) \quad N - mg \sin \alpha = mv^2/R,$$

ahol N a golyó és a lejtő között ható kényszererő. A kocsi $F = Mg + N \sin \alpha$ erővel nyomja a földet, ami (1) és (2) felhasználásával

$$(3) \quad F = M \cdot g + mg \sin \alpha (2h/R + 3 \sin \alpha).$$

Nyilvánvalóan látszik, hogy α növelésével az erő növekszik, és $\alpha = 90^\circ$ -nál éri el a maximális $F = 330$ N értéket ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

1. b) Ha a kocsit nem rögzítjük, a helyzet jóval bonyolultabbá válik, de az erő legnagyobb értékét itt is az alsó pontban éri el.

1988-01-044-2.eps

2. ábra

Tekintsük az alsó pontbeli helyzetet (2. ábra). Itt is igaz az energiamegmaradás törvénye: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = mgh + mgR$, ahol v a test sebessége, V pedig a kocsi sebessége a talajhoz viszonyítva. Vízszintes irányban az összimpulzus zérus kell hogy legyen, hiszen kezdetben ennyi volt, és ilyen irányú külső erő nem hatott a rendszerre, vagyis (az ábra szerint választva az irányításokat)

$$MV = mv.$$

Ebben az esetben a test a kocsihoz képest végez körmozgást, és mivel a vizsgált pillanatban a kocsi már nem gyorsul, a kocsihoz rögzített koordináta-rendszer inerciarendszer. Ebben a rendszerben a körmozgás egyenlete:

$$N - mg = m(v + V)^2/R.$$

A megmaradási tételekből v és V értékét kiszámíthatjuk, s ezeket N képletébe helyettesítve az $F = Mg + N$ erőre végül 450 N adódik.

2. A test centripetális gyorsulása nem függ a vonatkoztatási rendszertől, így a földhöz viszonyított pálya r' görbületi sugarára a

$$v^2/r' = (v + V)^2/R$$

összefüggés érvényes. Ebből

$$r' = Rv^2/(v + V)^2 = 2/9 \text{ m}.$$

Tóth Ildikó (Sárvár, Tinódi S. Gimn. II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés: Természetesen a mozgást leíró egyenletek tetszőleges α -ra felírhatóak, ekkor azonban figyelembe kell venni, hogy gyorsuló rendszerben vagyunk, s emiatt egy ma „tehetetlenségi erő” is fellép (3. ábra):

1988-01-045-1.eps

3. ábra

$$N + ma \cos \alpha - mg \sin \alpha = m[(v_x + V)^2 + v_y^2]/R \text{ (a kis test mozgásegyenlete),}$$

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mg(h + R \sin \alpha) \text{ (energiatétel),}$$

$$MV = mv_x \text{ (impulzus-tétel),}$$

$$(v_x + V)/v_y = \tan \alpha \text{ (kényszerfeltétel),}$$

$$\left. \begin{aligned} N \cdot \cos \alpha &= M \cdot a \\ F &= Mg + N \sin \alpha \end{aligned} \right\} \text{ (a kocsi mozgásegyenletei).}$$

Ezen egyenletek megoldásával belátható, hogy F maximuma valóban $\alpha = 90^\circ$ -nál van, bár ez nem olyan egyszerű, mint az 1. esetben.