

Az 1. ábrán feltüntettük a vízszintessel α szöget bezáró rúdra, valamint a vízszintesen csúszó tömegpontra ható erőket. A rúd tömegközéppontja egy $l = \frac{L}{2}$ sugarú, A középpontú körpályán mozog.

1987-12-473-1.eps

1. ábra

Jelöljük a tömegközéppont A körüli pillanatnyi szögsebességét ω_1 -gyel és a rúdnak a tömegközéppontja körüli szöggyorsulását β_1 -gyel! A szögsebessége a tömegközéppontja körül ugyancsak ω_1 .

Írjuk fel a rúd mozgásegyenleteit! A tömegközéppont gyorsulása és az erők közti kapcsolat:

$$(1) \quad K - F = m(l \cdot \beta_1 \cdot \sin \alpha - l \omega_1^2 \cdot \cos \alpha),$$

$$(2) \quad mg - N = (l \cdot \omega_1^2 \cdot \sin \alpha + l \cdot \beta_1 \cdot \cos \alpha),$$

ugyanis a tömegközéppont gyorsulása az $l \cdot \beta_1$ érintőleges és az $l \cdot \omega_1^2$ centripetális gyorsulás eredője.

A vízszintesen mozgó tömegpontra ugyancsak F nagyságú erő hat, s ha a gyorsulását a -val jelöljük, akkor a mozgásegyenlete

$$(3) \quad F = m \cdot a.$$

A rúd forgását meghatározó egyenlet

$$(4) \quad \theta \cdot \beta_1 = N \cdot l \cdot \cos \alpha - (K + F) \cdot \sin \alpha,$$

ahol

$$\theta = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}m \cdot l^2$$

a rúd tehetetlenségi nyomatéka a tömegközéppontjára vonatkoztatva.

Mivel a rúd alsó vége érintkezik az m tömegű tömegponttal, ennek a pontnak a vízszintes irányú sebessége és a gyorsulása meg kell egyezzen a tömegpont sebességével és gyorsulásával. A rúd alsó végpontjának vízszintes irányú sebessége a tömegközéppont $l \cdot \omega_1$ sebességének $l \cdot \omega_1 \cdot \sin \alpha$ vízszintes összetevőjéből és a forgómozgásból származó $l \cdot \omega_1$ kerületi sebesség megfelelő vetületéből tehető össze:

$$(5) \quad v = 2 \cdot l \cdot \omega_1 \cdot \sin \alpha.$$

Hasonló módon kaphatjuk meg, hogy a rúd alsó végének, s ezzel együtt a tömegpontnak a gyorsulása

$$(6) \quad a = 2 \cdot l \cdot (\beta_1 \cdot \sin \alpha - \omega_1^2 \cdot \cos \alpha).$$

(Az (5) és (6) egyenleteket a differenciálszámítás segítségével is megkaphatjuk, ha képezzük a tömegpont helyét megadó $x = 2 \cdot l \cdot \cos \alpha$ függvénynek az idő szerinti első, illetve második deriváltját. Figyelem: $\Delta\alpha/\Delta t = -\omega_1$!)

Használjuk fel a mechanikai energia megmaradásának törvényét is! A helyzeti energia nulla szintjét a talajszinten rögzítve:

$$(7) \quad m \cdot g \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}m \cdot l^2 \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot (2 \cdot l \cdot \omega_1 \sin \alpha)^2 + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha.$$

A fenti egyenlet jobb oldalának első tagja a rúd teljes mozgási energiája, a második tag pedig a tömegpont energiája.

Az (1)–(7) egyenletrendszer segítségével tetszőleges α szögre kiszámíthatjuk az F , K , N erőket, valamint a v , a , ω_1 és β_1 mennyiségeket. Ez a megoldás azonban nem alkalmas a rendszer mozgásának teljes leírására, hanem csak addig érvényes, amíg az F , K és N erők mindegyike pozitív. (Negatív erő húzásnak felelne meg, s erre sem a fal, sem pedig a talaj nem képes!)

Az (1), (3) és (6) egyenleteket összevetve leolvashatjuk, hogy minden pillanatban fennáll a

$$K = \frac{3}{2}F$$

összefüggés, ami azt jelenti, hogy ha valamikor megszűnik a rúd és a fal közti nyomóerő, ugyanabban a pillanatban a rúd és a tömegpont közötti erő is nullává válik. (Részletesebb diszkusszió azt mutatja, hogy N a mozgás során mindvégig pozitív marad, vagyis a rúd alsó vége nem emelkedik fel a talajról.)

Határozzuk meg, hogy a rúd milyen helyzeténél válhat K és F nullává! Az (1) – (7) egyenletekből N , ω_1 , β_1 , v és a kiküszöbölése után végül α -ra kapunk egy egyenletet:

$$(8) \quad 3 \sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha - 2 = 0.$$

Ezt az egyenletet próbálgatással, vagy grafikusán megoldva az α_0 gyökre

$$\sin \alpha_0 = 0,523 \quad \text{azaz} \quad \alpha_0 = 31,6^\circ$$

adódik. Ennél a szögnél a rúd elválk a függőleges faltól, s a tömegpont is elszakad a rúdtól. Mivel a továbbiakban vízszintes irányú erők nem hatnak, mindkét test megtartja az elszakadás pillanatához tartozó vízszintes irányú sebességét (a rúdnál ez természetesen a tömegközéppontra vonatkozik). Elvileg elképzelhető lenne, hogy egy későbbi időpontban a rúd felső vége nekiütközik a falnak, vagy az alsó vége utoléri a tömegpontot, de a részletesebb vizsgálat azt mutatja, hogy ezek egyike sem következik be. Az egyenletrendszer megoldásából a numerikus adatok behelyettesítése után $v = 2,05 \text{ m/s}$ érték adódik; ekkora sebességgel távozik jobb felé a kis test.

1987-12-475-1.eps

2. ábra

A rúd további mozgását a 2. ábrán látható erők szabják meg. A rúd szöggyorsulását β_{II} -vel, tömegközéppontjának függőleges gyorsulását pedig a_{II} -vel jelölve a mozgásegyenletek:

$$(9) \quad m \cdot g - N = m \cdot a_{II},$$

$$(10) \quad N \cdot l \cdot \cos \alpha = \theta \beta_{II},$$

s ehhez járul még egy kényszerfeltétel, amelyik azt fejezi ki, hogy a rúd alsó végpontjának függőleges gyorsulása nulla:

$$(11) \quad a_{II} = l \cdot \beta_{II} \cdot \cos \alpha + l \cdot \omega_{II}^2 \cdot \sin \alpha.$$

A rúd szögsebességét ismét az energia-tétel segítségével számíthatjuk ki:

$$(12) \quad m \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m \cdot l^2 \right) \cdot \omega_{II}^2 + \frac{1}{2} m \cdot (l \cdot \omega_{II} \cos \alpha)^2 = \\ = mgl \cdot \sin \alpha_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} ml^2 \right) \omega_0^2 + \frac{1}{2} m (l \omega_0 \cos \alpha_0)^2.$$

A bal oldal első tagja a helyzeti energia, a második tag az ω_{II} szögsebességű rúd forgási energiája, a harmadik pedig a függőleges irányú tömegközépponti mozgáshoz rendelhető energia; a jobb oldalon ugyanezeket találjuk a faltól való elszakadás pillanatában. (A vízszintes irányú mozgás energiáját nem szükséges felírunk, hiszen az időben állandó mennyiség.)

A (9)–(12) egyenletrendszert megoldva azt találjuk, hogy N mindvégig pozitív, tehát a rúd alsó vége nem emelkedik föl a talajról. Ha a mozgás részletesebb leírása helyett csupán arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora sebességgel érkezik a rúd felső vége a talajhoz, akkor a (12) egyenletből $\alpha = 0$ esetén meghatározhatjuk a rúd $\omega_{\max}$ szögsebességét, s ebből a „felső” vég sebességére

$$v_{\max} = 2 \cdot l \cdot \omega_{\max} = 6,56 \text{ m/s}$$

adódik.