A $t = 0$ pillanatban a függőlegeshez képest α szögben, v_0 kezdősebességgel elinduló vízcseppek mozgását az

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha - g \cdot t^2/2$$

és az

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha$$

egyenletek írják le. (Ezek az egyenletek tulajdonképpen csak a szabadon mozgó, már cseppekre szakadt vízsugárra érvényesek, a kifolyócső közelében még nem; – ott az egyes folyadékdarabkák a környező folyadék hatását is érzik, ezt azonban a továbbiakban elhanyagoljuk.)

A földetéréskor $y = 0$, ahonnan a repülés idejére

$$t^* = \frac{2v_0}{g}\cos\alpha,$$

a repülés távolságára pedig

$$X = x(t^*) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$

adódik. Egy tetszőleges t időpillanatban elinduló vízcsepp $T = t + t^*$ időpillanatban ér földet, azaz

$$T(t) = t + \frac{2v_0}{g} \cdot \cos\alpha(t), \tag{1}$$

repülés távolsága pedig

$$X(t) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha(t). \tag{2}$$

A fenti két egyenlet az

$$\alpha(t) = A\sin(2\pi t/t_0) \tag{3}$$

függvényalakkal együtt egyértelműen meghatározza a keresett $X(T)$ függvényt. A grafikus ábrázolás ténylegesen úgy történik, hogy kiszámítjuk különböző t értékekhez tartozó X és T mennyiségeket, és ezeket egy derékszögű koordinátarendszer tengelyeire felmérve az így kapott pontokat összekötjük. (Az ilyenfajta függvénymegadást, vagyis amikor X-et nem közvetlenül a független változó T-ből számítjuk ki, hanem mindkettőjüket egy harmadik mennyiségből, t-ből származtatjuk, *paraméteres alak*nak nevezik. A paraméteres függvényalaknak az az előnye, hogy vele „többértékű" függvények is megadhatók.)

Gyorsítja a függvényábrázolást az, ha észrevesszük, hogy az $X(T)$ függvény periodikus t_0 periódusidővel, tehát $X(T+t_0) = X(T)$, továbbá fennáll az $X(T+t_0/2) = -X(T)$ összefüggés is. Ez utóbbi miatt elegendő egy félperiódusra, tehát 1,5 s-nyi időtartamra szorítkoznunk, ezt pedig mondjuk 15 pontban, vagyis 0,1 s-onként számolva kielégítő pontossággal megkapjuk az X(T) függvény (1. ábra).

1987-04-187-1.eps

1. ábra

Látható, hogy $X(T)$ bizonyos időintervallumokban nem egyértékű, hanem három különböző értéket felvevő függvény. Ez azzal függ össze, hogy a különböző időpontokban – különböző irányokban – elindított vízcseppek egyszerre érhetik el a földet. Amennyiben a földetérés helyén szétfröccsenő vízfoltot egy „részecskének" tekintjük, amely vízszintesen mozog, úgy az 1. ábrát tanulmányozva azt a meglepő kijelentést tehetjük, hogy ezen részecskék száma nem állandó, hanem néha megváltozik. Az A, A', A'', ... pontoknak megfelelő pillanatokban hirtelen két új – eddig nem létező – részecske „keletkezik", majd nagy sebességgel eltávolodik egymástól. A B, B', B'', ... pontoknál viszont egy-egy részecske egymásnak ütközik, s mindkettő „eltűnik", annihilálódik. Ez a jelenség bizonyos értelemben jól modellezi az elemi részecskék és antirészecskéik (például elektronok és pozitronok) párosával történő keletkezését és annihilálódását.

Az $X(T)$ út–idő függvényből a sebességet a függvény meredekségének vizsgálatából kaphatjuk meg. Ez történhet az 1. ábrán látható görbe „grafikus deriválásával" (vagyis a meredekség pontonkénti lemérésével és ábrázolásával), vagy a (2), (3) és (4) egyenletekből a

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{\Delta X(t)}{\Delta T}\Big/\frac{\Delta T(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\frac{v_0^2}{g}[\cos 2\alpha(t)] \cdot 2A[\cos(2\pi t/t_0)] \cdot 2\pi/t_0}{1 - \frac{2v_0}{g}[\sin\alpha(t)] \cdot A[\cos(2\pi \cdot t/t_0)] \cdot 2\pi/t_0}$$

összefüggés segítségével. A sebességfüggvény ugyancsak többértékű függvénye T-nek (2. ábra).

1987-04-188-1.eps

2. ábra

Az $A,\ A^{'},\ A^{''},\ \ldots$ keletkezési – és a $B,\ B^{'},\ B^{''},\ \ldots$ megsemmisülési pontokban a sebesség határértéke végtelen nagy. Ez azonban nincs ellentmondásban a relativitáselmélet azon állításával, miszerint a fénynél gyorsabban egyetlen test sem mozoghat, hiszen az $X(T)$ függvény nem egyazon anyagi pont helyzetét, hanem különböző vízcseppek földetérési koordinátáit adja meg.