

A  $t = 0$  pillanatban a függőlegeshez képest  $\alpha$  szögben,  $v_0$  kezdősebességgel elinduló vízcseppek mozgását az

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha - g \cdot t^2/2$$

és az

$$x(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha$$

egyenletek írják le. (Ezek az egyenletek tulajdonképpen csak a szabadon mozgó, már cseppekre szakadt vízszugárra érvényesek, a kifolyócső közelében még nem; – ott az egyes folyadékdarabkák a környező folyadék hatását is érzik, ezt azonban a továbbiakban elhanyagoljuk.)

A földetéréskor  $y = 0$ , ahonnan a repülés idejére

$$t^* = \frac{2v_0}{g} \cos \alpha,$$

a repülés távolságára pedig

$$X = x(t^*) = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

adódik. Egy tetszőleges  $t$  időpillanatban elinduló vízcsepp  $T = t + t^*$  időpillanatban ér földet, azaz

$$(1) \quad T(t) = t + \frac{2v_0}{g} \cdot \cos \alpha(t),$$

repülés távolsága pedig

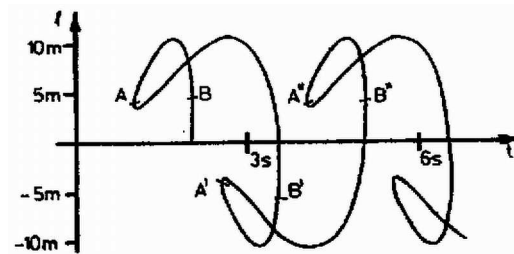
$$(2) \quad X(t) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha(t).$$

A fenti két egyenlet az

$$(3) \quad \alpha(t) = A \sin(2\pi t/t_0)$$

függvényalakkal együtt egyértelműen meghatározza a keresett  $X(T)$  függvényt. A grafikus ábrázolás ténylegesen úgy történik, hogy kiszámítjuk különböző  $t$  értékekhez tartozó  $X$  és  $T$  mennyiségeket, és ezeket egy derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire felmérve az így kapott pontokat összekötjük. (Az ilyenfajta függvénymegadást, vagyis amikor  $X$ -et nem közvetlenül a független változó  $T$ -ből számítjuk ki, hanem mindkettőjüket egy harmadik mennyiségből,  $t$ -ből származtatjuk, *paraméteres alak*nak nevezik. A paraméteres függvényalakknak az az előnye, hogy vele „többértékű” függvények is megadhatók.)

Gyorsítja a függvényábrázolást az, ha észrevesszük, hogy az  $X(T)$  függvény periodikus  $t_0$  periódusidővel, tehát  $X(T+t_0) = X(T)$ , továbbá fennáll az  $X(T+t_0/2) = -X(T)$  összefüggés is. Ez utóbbi miatt elegendő egy félperiódusra, tehát 1,5 s-nyi időtartamra szorítkoznunk, ezt pedig mondjuk 15 pontban, vagyis 0,1 s-onként számolva kielégítő pontossággal megkapjuk az  $X(T)$  függvényt (1. ábra).



1. ábra

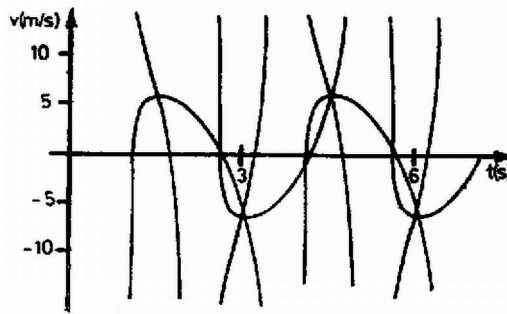
Látható, hogy  $X(T)$  bizonyos időintervallumokban nem egyértékű, hanem három különböző értéket felvevő függvény. Ez azzal függ össze, hogy a különböző időpontokban – különböző irányokban – elindított vízcseppek egyszerre érhetik el a földet. Amennyiben a földetérés helyén szétfröccsenő vízfoltot egy „részecskének” tekintjük, amely vízszintesen mozog, úgy az 1. ábrát tanulmányozva azt a meglepő kijelentést tehetjük, hogy ezen részecskék száma nem állandó, hanem néha megváltozik. Az  $A, A', A'', \dots$  pontoknak megfelelő pillanatokban hirtelen két új – eddig nem létező – részecske „keletkezik”, majd nagy sebességgel eltávolodik egymástól. A  $B, B', B'', \dots$  pontoknál viszont egy-egy részecske egymásnak ütközik, s mindkettő „eltűnik”, annihilálódik. Ez a jelenség bizonyos értelemben jól modellezi az elemi részecskék és antirészecskék (például elektronok és pozitronok) párosával történő keletkezését és annihilálódását.

Az  $X(T)$  út-idő függvényből a sebességet a függvény meredekségének vizsgálatából kaphatjuk meg. Ez történhet az 1. ábrán látható görbe „grafikus deriválásával” (vagyis a meredekség pontonkénti lemérésével és ábrázolásával), vagy a (2), (3) és (4) egyenletekből a

$$\frac{\Delta X}{\Delta T} = \frac{\Delta X(t)}{\Delta T} \bigg/ \frac{\Delta T(t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\frac{v_0^2}{g} [\cos 2\alpha(t)] \cdot 2A[\cos(2\pi t/t_0)] \cdot 2\pi/t_0}{1 - \frac{2v_0}{g} [\sin \alpha(t)] \cdot A[\cos(2\pi \cdot t/t_0)] \cdot 2\pi/t_0}$$

összefüggés segítségével. A sebességfüggvény ugyancsak többértékű függvénye  $T$ -nek (2. ábra).



2. ábra

Az  $A, A', A'', \dots$  keletkezési – és a  $B, B', B'', \dots$  megsemmisülési pontokban a sebesség határértéke végtelen nagy. Ez azonban nincs ellentmondásban a relativitáselmélet azon állításával, miszerint a fénynél gyorsabban egyetlen test sem mozoghat, hiszen az  $X(T)$  függvény nem egyazon anyagi pont helyzetét, hanem különböző vízcseppek földtérési koordinátáit adja meg.