

A vízfelszínre helyezett alumíniumhuzalra a saját súlyán kívül hat a vízbe merült térfogattal arányos felhajtóerő, a felületi feszültségből és a h besüllyedéssel arányos hidrosztatikai nyomásból származó erő; ezen erők egyensúlya alapján határozhatjuk meg a maximális huzalátmérőt. Mindegyik erő arányos a drót hosszával, így elegendő az egységnyi hosszra ható erőket kiszámítani.

Az egységnyi hosszúságú, r sugarú Al huzal súlya $\rho_{AI} \cdot g \cdot r^2 \pi$. A vízbe merült térfogatrész egy 2ϑ központi szöggel jellemezhető körszelet, így a felfelé mutató felhajtóerő: $\rho \cdot g r^2 (\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta)$, ahol ρ a víz sűrűsége.

A h besüllyedésből adódó hidrosztatikai nyomás $\rho \cdot g h$, mely $2r \cdot \sin \vartheta$ -val arányos keresztmetszetre $2\rho \cdot g h \cdot r \sin \vartheta$ nagyságú, a huzal súlyával ellentétes irányú erőt fejt ki.

A vízzel kétoldalt érintkező Al drótra a felületi feszültségből származó erő 2α egységnyi hosszra vonatkoztatva. Az erők vektora az érintkezési vonalon a vízfelszín síkjában fekszik, így a vízszintes komponensek kétoldalt kiegyenlítik egymást, míg a függőleges komponensek eredője egy függőleges, felfelé mutató $2\alpha \cdot \sin \vartheta$ járulékot ad az előbbi erőkhöz.

A fentiek alapján felírható az egyensúly feltétele:

$$(1) \quad \rho_{AI} g \cdot \pi r^2 = \rho \cdot g r^2 (\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) + 2\rho \cdot g h r \sin \vartheta + 2\alpha \cdot \sin \vartheta.$$

A feladatban megadott h kifejezést (1)-be írva a keresett egyensúlyi sugárra az alábbi másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\left(\rho \cdot g (\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta) - \pi \cdot \rho_{AI} g \right) r^2 + \left(4 \sqrt{\alpha \cdot \rho \cdot g} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right) r + 2\alpha \cdot \sin \vartheta = 0.$$

Osszuk el ezt az egyenletet $\rho \cdot g$ -vel és alkalmazzuk az $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho \cdot g}}$ jelölést, ekkor

$$\left(\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - \pi \frac{\rho_{AI}}{\rho} \right) r^2 + (4 \sin \vartheta / 2 \cdot \sin \vartheta) r \cdot a + 2a^2 \sin \vartheta = 0$$

adódik. Ebben az egyenletben adatként a dimenziótlan $\rho_{AI}/\rho = 2,7$ mellett a hosszúság dimenziójú a szerepel, amelynek számértéke függvénytáblázatban megtalálható adatokkal

$$a = \sqrt{\frac{0,0729 \text{ N/m}^2}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3}} = 2,73 \text{ mm}.$$

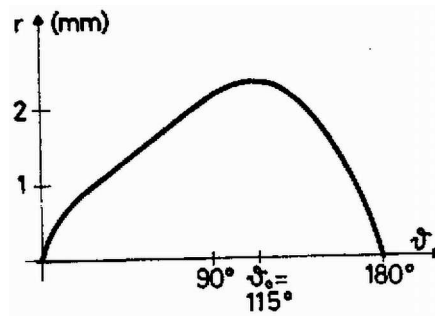
Célszerű az r sugarat is „ a -egységekben” mérni, azaz $r = x \cdot a$ alakban keresni. Ezzel a dimenziótlan x mennyiségre a

$$(2) \quad (\vartheta - \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta - 2,7\pi)x^2 + \left(4 \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \vartheta \right) x + 2 \cdot \sin \vartheta = 0$$

másodfokú egyenlet adódik.

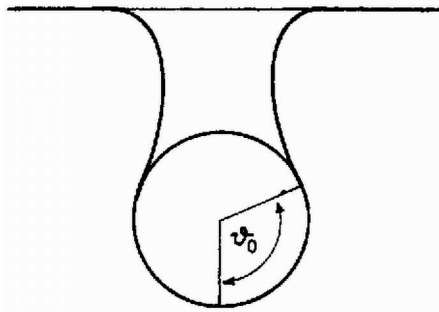
Az egyenlet együtthatói a ϑ paramétertől függenek, amely 0-tól π -ig változhat. A megoldóképlettel kifejezhetjük r -t a ϑ függvényében, és megkeresve a függvény maximumát, nyerjük a keresett maximális huzalátmérőt. Az itt vázolt módszer a differenciálszámítás elemeit felhasználva egy rendkívül bonyolult, csak numerikusan megoldható egyenletre vezet ϑ -ban. Ennél egyszerűbb, ha közvetlenül a (2) egyenletet használjuk a numerikus számoláshoz. Elegendően sűrűn (pl. 10° -onként) kiszámítjuk az adott ϑ szöghöz tartozó másodfokú egyenlet együtthatóit, majd ezekből az x gyököt. (A két gyök közül a pozitívat tartjuk meg.) Az r sugarat a ϑ függvényében ábrázolva kiválaszthatjuk a maximális r értéket. Szerencsére most már könnyen hozzájuthatunk kisebb személyi számítógépekhez, és így gyorsan és elegendő pontossággal végrehajthatjuk a numerikus számításokat. Egy lehetséges BASIC nyelvű programrészlet:

```
100 INPUT „SŰRŰSÉG”; RO
110 PRINT „KEZDŐ ÉS VÉGSZÖG”
120 INPUT „TK, TV:”; TK, TV
130 PRINT „A SZÖGTARTOMÁNY FELOSZTÁSÁNAK SZÁMA:”
140 INPUT „N:”; N
150 FOR I = 0 TO N
160 LET TT=TK+(TV-TK)/N*I
170 LET TE=TT*PI/180
180 LET A=TE-SIN(TE)*COS(TE)-3,14159*RO
190 LET B=4*SIN(TE/2)*SIN(TE):LET C=2*SIN(TE)
200 LET X=(-B+SQR(B*B-4*A*C))/2/A
210 PRINT „SZÖG, SUGÁR=”; TT, X*2.73
220 NEXT I
```



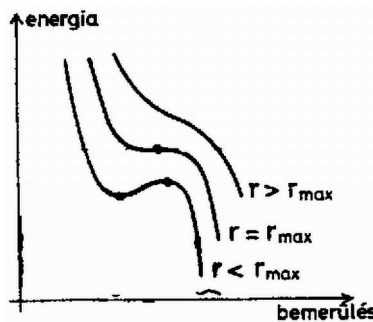
1. ábra

Az eredményt grafikonon ábrázoltuk (1. ábra). A bemenő adatok különböző értékei mellett egyre pontosabban adhatjuk meg a maximális r értéket. Két tizedesjegyre $\vartheta_0 = 115^\circ$ -nál $r_{\max} = 2,32$ mm. A vízre helyezhető Al drót maximális átmérője 4,64 mm és ekkor $h = 4,59$ mm a besüllyedés. A drót legalsó alkotója $h + r(1 + \cos(180 - \vartheta_0)) = 7,89$ mm mélyen van a víz felszíne alatt (2. ábra).



2. ábra

A megoldás fizikai jelentése és az egyensúlyi viszonyok stabilitása jól szemléltethető egy olyan ábrával, amelyen egy adott sugarú henger és a víz teljes energiáját tüntetjük fel a henger helyzetének (bemerülési mélységének) függvényében. Ezt a grafikont úgy kaphatnánk meg, ha a hengerre ható teljes erőt – vagyis az (1) egyenlet jobb és bal oldalának különbségét – megszoroznánk a henger kicsiny elmozdulásaival, s az így számított munkavégzéseket valamely önkényesen választott nullponttól kiindulva összegeznénk, integrálnánk. Az eredmény a 3. ábrán látható görbesereg lenne.



3. ábra

Amennyiben $r < r_{\max}$, úgy két olyan ϑ érték is található, amelynél erőegyensúly valósul meg (lásd 1. ábra), vagyis ahol az energia-függvénynek szélső értéke van. A kisebb bemerülés stabil –, a nagyobb instabil egyensúlynak felel meg. A henger sugarát növelve $r = r_{\max}$ -nál a két egyensúlyi helyzet „összecúszik”, az energiafüggvénynek pedig inflexió pontja alakul ki. Ekkor és ennél nagyobb sugarú hengereknél semmilyen helyzetben nem lehet egyensúly, sőt már $r \leq r_{\max}$ esetén is – az energiafüggvény nagyon „sekély” lokális minimuma miatt – nagyon nehezen állítható be az egyensúlyi helyzet.

Megjegyzés. Kísérletileg is meghatározhatjuk az r_{\max} értéket amely több körülmény befolyásoló hatása miatt eltérhet a fenti elméleti r_{\max} értéktől. A felületi feszültség nem tiszta víz esetén megváltozik, a drót véges hosszúságú, és nagyon óvatosan kell a vízre tenni a zavarok elkerülése miatt. Tóth Tamás elvégezte a kísérletet, és szerinte $r > 1,5$ mm esetén elsüllyed a drót.

A megoldás során hallgatólagosan feltételeztük, hogy a víz egyáltalán nem nedvesíti az alumíniumot, vagyis hogy a víz és a fém ún. illeszkedési szöge $\approx 180^\circ$. Ez szigorúan véve nem igaz, de a huzal felületének szennyeződése, „zsírossága” miatt jó közelítésnek tekinthető.