

Legyen a kocka oldala a , a félgömb sugara R (1. az ábrát)!

1987-03-133-2.eps

Tételezzük fel, hogy a súrlódás elég nagy ahhoz, hogy a kocka ne csússzon meg! (Ellenkező esetben nincsen stabil egyensúly.) A stabil egyensúly feltétele az, hogy a kockát kissé kitérítve, visszatérjen eredeti helyzetébe. Másképpen fogalmazva: kitérítéskor a helyzeti energiája nőjön. Térítsük ki a kockát kicsiny α szöggel, és határozzuk meg helyzeti energiájának változását! Mivel a kocka tapad a félgömbhöz, ez gördülő mozgást enged csak meg. Más szóval az AB távolság egyenlő $R \cdot \alpha$ -val. B az a pont, amely eredetileg érintkezett a félgömbbel, α -t radiánban mérjük. A tömegközéppont eredeti magassága $R + a/2$, a jelenlegi pedig $OA' + BB' + BC'$. Az ábráról látható, hogy

$$OA' = R \cos \alpha$$

$$BC' = a \cos \alpha/2.$$

Mivel tudjuk, hogy $AB = R \cdot \alpha$, eszerint $BB' = R \cdot \alpha \cdot \sin \alpha$. Tehát a tömegközéppont magasságváltozása (h_1 az eredeti, h_2 az új magasság):

$$h_2 - h_1 = R \cos \alpha + a \cdot \cos \alpha/2 + R \cdot \alpha \sin \alpha - (R + a/2) =$$

$$= (R + a/2)(\cos \alpha - 1) + R\alpha \sin \alpha.$$

Mivel α nagyon kicsiny szög, használhatjuk a következő közelítéseket: $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$.

Ezt beírva kapjuk, hogy kis kitérítés esetén a kocka tömegközéppontjának magasságváltozása $\frac{\alpha^2}{2}[R - a/2]$. Látható, hogy ahhoz, hogy ez zérusnál nagyobb legyen, az $a < 2R$ feltételnek kell teljesülnie. Ez egyben az elégséges feltétel is, ugyanis az előzőek alapján ezt a feltételt teljesítve mindig találhatunk olyan, kellően kicsiny α -t, amelyre a tömegközéppont emelkedni fog.

Tehát $2R > a$ a stabil egyensúly szükséges és elégséges feltétele.