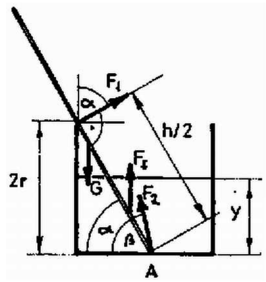
Az egyszerűség kedvéért vegyük a súrlódást 0-nak a henger felső, száraz pereménél. Írjuk fel az erő és nyomatéki egyensúlyokat az 1. ábra szerinti helyzetben, tehát $\alpha > 45°$ esetén.



1. ábra

$$\Sigma F_x = 0, \qquad F_1 \cdot \sin\alpha = F_2 \cdot \cos\beta,$$
$$\Sigma F_y = 0, \qquad G = F_f + F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \sin\beta,$$
$$\Sigma M_A = 0, \quad G \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\alpha = F_1 \cdot \frac{2r}{\sin\alpha} + F_f \frac{y/2}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Mivel a vékony pálca keresztmetszete nem adott, vezessük be erőegységként a pálca egységnyi hosszának a súlyát!

$$f_1 = F_1 / A \cdot \varrho \cdot g,$$
$$f_2 = F_2 / A \cdot \varrho \cdot g.$$

Mivel

$$G = h \cdot A \cdot \varrho \cdot g,$$
$$F_f = \frac{y}{\sin\alpha} A \cdot \varrho \cdot r \cdot g,$$

ezért

(1) $$f_1 \cdot \sin\alpha = f_2 \cdot \cos\beta,$$

(2) $$h = \frac{y}{\sin\alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cos\alpha + f_2 \sin\beta,$$

(3) $$h \cdot \frac{h}{2} \cos\alpha = f_1 \cdot \frac{2r}{\sin\alpha} + \frac{y}{\sin\alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} \cdot \frac{y/2}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Mivel az F_2 vízszintes komponense tapadási súrlódási erő:

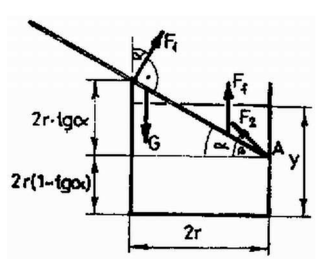
$$-\mu \leqq \frac{F_2 \cdot \cos\beta}{F_2 \cdot \sin\beta} \leqq \mu, \quad \text{azaz}$$

$$-\mu \leqq \operatorname{ctg}\beta \leqq \mu.$$

Ezen kívül feltétel még, hogy

$$f_1 \geqq 0; \qquad f_2 \geqq 0.$$

Az erő és nyomatéki egyensúlyok a 2. ábra szerinti helyzetben, tehát $\alpha < 45°$ esetén:



2. ábra

$$\Sigma F_x = 0, \quad F_1 \cdot \sin\,\alpha = F_2 \cos\,\beta;$$
$$\Sigma F_y = 0, \quad G = F_f + F_1 \cdot \cos\,\alpha + F_2 \cdot \sin\,\beta;$$
$$\Sigma M_A = 0, \quad G \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\,\alpha = F_1 \cdot \frac{2r}{\cos\,\alpha} + F_f \cdot \frac{[y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)]/2}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

A felhajtóerő:

$$F_f = 0, \quad \text{ha} \quad y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha) < 0;$$

$$F_f = \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha} A \cdot \varrho_v g, \quad \text{ha}$$

$$y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha) = 0.$$

Először keressük az egyensúlyi helyzeteket ebben a két esetben. Vigyázat: a 45°-kal való egyenlőséget, azaz a sarokba szorult helyzetet óvatosan kerültük.

Ezért ha $y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha) < 0$,

(1') $$f_1 \sin\,\alpha = f_2 \cos\,\beta,$$

(2') $$\varrho_v h = \frac{y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{\sin\,\alpha} \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cos\,\alpha + f_2 \sin\,\beta,$$

(3') $$h \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\,\alpha = f_1 \frac{2r}{\cos\,\alpha} + \frac{[y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)]^2}{2 \sin\,\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} \frac{\varrho_v}{\varrho}.$$

Az F_2 függőleges komponense tapadási súrlódási erő, ezért

$$-\mu \leqq \frac{F_2 \cdot \sin\,\beta}{F_2 \cdot \cos\,\beta} \leqq \mu, \qquad \text{azaz}$$
$$-\mu \leqq \operatorname{tg}\beta \leqq \mu.$$

Ugyancsak feltétel az $f_1 \geqq 0$, $f_2 \geqq 0$ egyenlőtlenségek teljesülése.

Ezért ha $y - 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha) < 0$,

(1") $$f_1 \sin\,\alpha = f_2 \cos\,\beta,$$

(2") $$h = f_1 \cos\,\alpha + f_2 \sin\,\beta,$$

(3") $$\frac{h^2}{2} \cos\,\alpha = f_1 \cdot \frac{2r}{\cos\,\alpha}.$$

(1, 2, 3) megoldása

$$f_1 = \frac{h^2}{4r} \cdot \frac{\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} \left[\sin^2\alpha - \left(\frac{y}{h}\right)^2 \frac{\varrho_v}{\varrho}\right].$$

A $45° < \alpha < 90°,\ 0 < y < 2r$ intervallumban $f_1 \geqq 0$ mindig teljesül:

$$f_2 = f_1 \cdot \sin\,\alpha \cdot \frac{1}{\cos\,\beta},$$

$$h = \frac{y}{\sin\alpha} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1 \cdot \cos\,\alpha + f_1 \cdot \sin\,\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}\,\beta = \frac{h - \dfrac{y}{\sin\,\alpha} \cdot \dfrac{\varrho_v}{\varrho} - f_1 \cdot \cos\,\alpha}{f_1 \cdot \sin\,\alpha}.$$

$-\dfrac{1}{2} \leqq \operatorname{ctg}\beta \leqq \dfrac{1}{2}$ és F_2 miatt nem engedjük meg a $0°$-nál kisebb és $180°$-nál nagyobb szögeket. Így β-ra a megengedett intervallum $63{,}4°-116{,}6°$.

$f_1 \geqq 0$ miatt ebből is ki kell zárni a $90°$-nál nagyobb szögeket.

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{f_1 \sin\alpha}{h - \dfrac{y}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\varrho_v}{\varrho} - f_1\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{2} = \frac{f_1 \sin\alpha}{h - \dfrac{y}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\varrho_v}{\varrho} - f_1\cos\alpha}.$$

Az ebből meghatározott $y(\alpha)$-nál nagyobb vízmagasság esetén a rúd megcsúszik és csak a sarokban áll meg:

$$\frac{h}{2} - \frac{y}{2\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho} = f_1\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2}\right),$$

$$\frac{h}{2} - \frac{y}{2\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho} = \frac{h^2}{4r}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2}\right)\left[\sin^2\alpha - \left(\frac{y}{h}\right)^2\frac{\varrho_v}{\varrho}\right],$$

$$y^2\cdot\frac{1}{h^2}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho}\cdot\frac{h^2}{4r}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2}\right) - y\frac{1}{2\sin\alpha}\frac{\varrho_v}{\varrho} + \frac{h}{2} -$$

$$-\frac{h^2}{4r}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left(\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{2}\right)\sin^2\alpha = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei adják meg azt a h^2 magasságot, amelynél egy adott α helyzet már nem stabil és a rúd a sarokba csúszik.

$$y = 0\text{-nál} \qquad \alpha = 63,67°.$$

Ennél kisebb kezdeti α esetén már a betöltés előtt a sarokba csúszik a rúd.

Most vizsgáljuk az $(1', 2', 3')$; $y > 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)$ által meghatározott egyensúlyi helyzeteket.

$$f_1 = \frac{h^2}{4r}\cos^2\alpha\cdot\left[1 - \left(\frac{y - 2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{h\cdot\sin\alpha}\right)^2\frac{\varrho_v}{\varrho}\right].$$

A $0 < \alpha < 45°$, $0 < y < 8$, $2r(1 - \operatorname{tg}\alpha) < y$ intervallumban ez a kifejezés pozitív, így $f_1 \leqq 0$ mindig teljesül,

$$f_2 = f_1\cdot\sin\alpha\cdot\frac{1}{\cos\beta} \text{ -t} \qquad (2')\text{-be helyettesítve}$$

$$h = \frac{y - 2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho} + f_1\cdot\cos\alpha + f_1\cdot\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h - \dfrac{y - 2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\varrho_v}{\varrho} - f_1\cos\alpha}{f_1\cdot\sin\alpha}.$$

A megkötések β-ra :

$$-\frac{1}{2} \leqq \operatorname{tg}\beta \leqq \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad -26{,}6° \leqq \beta \leqq 26{,}6°$$

és $-90° \leqq \beta \leqq 90°$, mert a fal támaszerőt fejt ki. Mindez csak $y \leqq 2r(1 - \operatorname{tg}\alpha)$ esetén igaz.

A megcsúszás határesetében $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{2}$ vagy $\operatorname{tg}\beta = -\dfrac{1}{2}$.

$$\pm\frac{1}{2}=\frac{h-\dfrac{y-2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\varrho_v}{\varrho}-f_1\ \cos\alpha}{f_1\ \sin\alpha},$$

$$f_1\left(\cos\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\right)=h-\frac{y-2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho},$$

$$\frac{h^2}{4r}\cos^2\alpha\left[1-\left(\frac{y-2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{h\cdot\sin\alpha}\right)^2\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho}\right]\left(\cos\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\right)=$$

$$=h-\frac{y-2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho},$$

$$y^2\cdot\frac{h^2}{4r}\cos^2\alpha\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho\sin^2\alpha\cdot h^2}\left(\cos\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\right)-$$

$$-y\left[\frac{1}{\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho}+\cos^2\alpha\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho}\cdot\frac{(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin^2\alpha}\cdot\left(\cos\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\right)\right]+h+\frac{2r(1-\operatorname{tg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot\frac{\varrho_v}{\varrho}-$$

$$-\frac{h^2}{4r}\cdot\cos^2\alpha\left[1-\frac{\varrho_v}{\varrho}\cdot\frac{4r^2(1-\operatorname{tg}\alpha)^2}{h^2\cdot\sin^2\alpha}\right]\cdot\left(\cos\alpha\pm\frac{\sin\alpha}{2}\right)=0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a gyökei adják meg azokat a szögtartományokat, ahol lehetséges az egyensúly, feltéve, hogy vannak ilyen gyökök és a vízszint magasabban van a pálca végénél.

Ha a vízszint alacsonyabban van, mint a pálca vége, akkor ($1''$, $2''$, $3''$)-ből

$$h=f_1\cdot\cos\alpha+f_1\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h-f_1\cdot\cos\alpha}{f_1\cdot\sin\alpha}=\frac{h}{\dfrac{h^2}{4r}\cdot\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{4r}{h\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\beta=\pm1\text{ -ből }\operatorname{ctg}\alpha\left(\frac{8}{9}\frac{1}{\cos^3\alpha}-1\right)=\pm\frac{1}{2}.$$

Ennek numerikus megoldásából

$$+\frac{1}{2}:\qquad \alpha_1=\ 29{,}91^\circ,$$
$$-\frac{1}{2}:\qquad \alpha_2=\ \ 8{,}89^\circ.$$

Azaz α_1-nél nagyobb szög esetén a pálca a falnál lecsúszik, α_2-nél kisebb szög esetén pedig kiborul.

Vizsgáljuk az $\alpha=45^\circ$-os helyeket!

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \operatorname{tg}45^\circ=1.$$

Ezt a helyzetet nem tekinthetjük az 1. ábra határesetének, nem feltételezhetjük, hogy a rúd csak az alsó lappal érintkezik.

Ha a 2. ábra határesetének tekintjük, azaz feltételezzük, hogy a rúd csak az oldalsó lappal érintkezik, a következőkre jutunk a $\mathrm{tg}\alpha = \pm\frac{1}{2}$-re adódó másodfokú egyenletből:

$$y^2 \cdot \frac{1}{4r} \cdot \frac{\varrho_v}{\varrho}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) +$$
$$+y\left[\sqrt{2}\,\frac{\varrho_v}{\varrho}\right] + h - \frac{h^2}{4r} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0.$$

(Sok tag esik ki az $1 - \mathrm{tg}\ \alpha = 0$ miatt.)

$$y^2 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{5}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - y \cdot 2 \cdot \frac{8}{5} + \sqrt{2} \cdot 18 - \frac{18 \cdot 18}{16} \cdot \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$y^2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) - y \cdot \frac{16}{5} + \left[18 \cdot \sqrt{2} - \frac{81}{8} \cdot \left(1 \pm \frac{1}{2}\right)\right] = 0.$$

$$y_{1,2} = \frac{\frac{16}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2} + 18 \cdot 2 - \frac{81}{8} \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2}} \left\langle \begin{array}{l} 3{,}934, \\ 17{,}399. \end{array}\right.$$

$$y_{3,4} = \frac{\frac{16}{5} \pm \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} + 18\sqrt{2} - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}} \left\langle \begin{array}{l} 7{,}178, \\ 56{,}822. \end{array}\right.$$

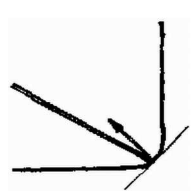
Ez azt jelenti, hogy $y = 3{,}934$ cm-nél még nem elég a függőleges fal támasza, visszacsúszik a pálca az alaplapra is, $y = 7{,}178$ cm-nél pedig a 45°-os helyzetéből a rúd felcsúszik a falon. (Feltéve, hogy addig külső kényszerrel ott tartottuk.)

Tehát a pálca 45°-os helyzetében 3,934 cm vízmagasságig nem lehet úgy, hogy csak az alaplapra vagy csak a falra támaszkodjon.

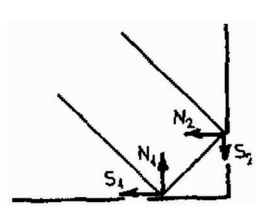
Azaz bármely vízmagassághoz és 45°-tól különböző helyzethez meg tudjuk mondani, hogy egyensúlyi helyzet vagy sem, s azt is $\mathrm{ctg}\,\alpha$ ill. $\mathrm{tg}\,\alpha$ alapján, hogy a súrlódási erő melyik irányban nem volt elegendő az egyensúly megtartásához, a rúd milyen irányban mozdult el.

Ahhoz azonban, hogy valamit tudjunk mondani a pálca $\alpha = 45°$-os viselkedéséről, a sarok alakjáról kellene többet tudnunk.

Ez a feladat egy egész problémakör. Egészen másként kell hozzáfogni a megoldásához, ha a saroknak a 3. a) ábra vagy a 3. b) ábra szerinti alakja van. A rúd vastagságának elhanyagolásával is csínján kell bánni.



3.a ábra



3.b ábra

Ezért ez a megoldás nem is lehetett más, csak útmutató.