

A kocsi és a rajta levő láda v_0 állandó sebességgel érkezik a rugó szabad végéhez. (A kocsira ható gördülő és légellenállást elhanyagoljuk.) Ettől kezdve a rugó fékezni fogja a testeket az alábbi összefüggés szerint:

$$(1) \quad 2Ma = -Dy,$$

ahol y a rugó összenyomódása, a pedig a kocsi és a láda közös gyorsulása (1. ábra). $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{2M}}$ frekvenciájú harmonikus rezgőmozgás jön létre, amely addig tart, amíg a kocsi el nem hagyja a rugó végét (egy félperiódus után), vagy a láda meg nem csúszik a kocsin.

1986-05-235-2.eps

1. ábra

A rezgés maximális sebessége v_0 , így az amplitúdója $A_1 = v_0/\omega_1$. Mérjük az időt a rugó elérésének pillanatától – ekkor a kocsi sebességének időfüggése:

$$(2) \quad v(t) = v_0 \cos \omega_1 t.$$

A láda abban a t_1 időpontban csúszik meg, amikor a rá ható fékezőerő eléri a súrlódási erő maximális μMg értékét:

$$MA_1\omega_1^2 \sin \omega_1 t_1 = \mu Mg;$$

$$(3) \quad t_1 = \frac{1}{\omega_1} \arcsin \frac{\mu g}{v_1 \omega_1} = \sqrt{\frac{2M}{D}} \arcsin \left(\frac{\mu g}{v_0} \sqrt{\frac{2M}{D}} \right).$$

A megcsúszás pillanatában, amikor a gyorsulás μg , az y_1 kitérésre teljesül, hogy $Dy_1 = 2M\mu g$, innen

$$(4) \quad y_1 = 2\mu Mg/D.$$

A sebesség ugyanekkor

$$(5) \quad v_1 = v_0 \cos \omega_1 t_1 = v_0 \sqrt{1 - \sin^2 \omega_1 t_1} = \sqrt{v_0^2 - \frac{2\mu^2 g^2 M}{D}}.$$

Amennyiben

$$(I) \quad \frac{\mu g}{v_0} \sqrt{\frac{2M}{D}} \geq 1,$$

a láda nem csúszik meg a kocsin, és $\pi/\omega_1 = \pi\sqrt{2M/D}$ félperiódusnyi idő eltelte után $-v_0$ sebességgel együtt elhagyják a rugót. Közben a sebességük a (2) egyenlet szerint változik (2. ábra).

1986-05-235-3.eps

2. ábra

Ha az (I) egyenlőtlenség nem teljesül, akkor a láda megcsúszása után a kocsira ható erő:

$$(6) \quad Ma = -Dy + \mu Mg.$$

Innen a láda gyorsulása:

$$(7) \quad a = -\frac{D}{M} \left(y - \frac{\mu Mg}{D} \right) = -\frac{D}{M} y'$$

ahol $y' = y - \mu Mg/D$. A (7) egyenlet szerint a kocsi t_1 időpont után is harmonikus rezgőmozgást fog végezni, de most $\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{M}} = \sqrt{2}\omega_1$ frekvenciával és az $y_o = \mu Mg/D$ nyugvópont körül. Ennek a rezgőmozgásnak az amplitúdója megkapható a t_1 -beli kitérésből és sebességből:

$$(8) \quad A_2 = \sqrt{y_1'^2 + (v_1/\omega_2)^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu Mg}{D} \right)^2 + \frac{M}{D} \left(v_0^2 - \frac{2\mu^2 g^2 M}{D} \right)} = \sqrt{\frac{M}{D}} \sqrt{v_0^2 - \mu^2 g^2 M/D}.$$

A t_1 időpontbeli φ_2 fázisszög:

$$(9) \quad \varphi_2 = \arcsin y_1'/A_2.$$

A kocsi sebessége a t_1 időpont után tehát:

$$(10) \quad v(t) = A_2\omega_2 \cos [\omega_2(t - t_1) + \varphi_2].$$

A láda mozgását a megcsúszás után csak a súrlódási erő befolyásolja, ezért a sebessége ekkor

$$(11) \quad v = v_1 - \mu g(t - t_1).$$

Ha a kocsi elég hosszú, és a láda nem csúszik le, akkor egy idő után a kocsi és a láda sebessége újból egyenlő lesz, és a csúszás megszűnik. Külön tárgyaljuk azt az esetet, amikor (II) a csúszás előbb szűnik meg, mint ahogy a kocsi elhagyja a rugót, és külön azt, amikor (III) a csúszás később szűnik meg. Az utóbbi esetben a rugó elhagyásának t_2 időpontjában a láda sebessége nagyobb, mint a kocsié. Mivel ez a helyzet éppen π fázissal későbbi, mint a t_1 -beli,

$$t_2 = t_1 + \pi/\omega_2 = t_1 + \pi\sqrt{\frac{M}{D}},$$

a sebességekre pedig $v_1 - \mu g\pi\sqrt{\frac{M}{D}} > -v_1$, amiből

$$(III) \quad \frac{\mu g}{v_0} \sqrt{\frac{2M}{D}} < \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2/8}} \approx 0,6691.$$

A rugó elhagyása után a kocsi sebessége:

$$(13) \quad v(t) = -v_1 + \mu g(t - t_2)$$

t_3 időpontban végül a kocsi és a láda összetapad:

$$(14) \quad -v_1 + \mu g(t_3 - t_2) = v_1 - \mu g(t_3 - t_1).$$

Innen

$$(15) \quad t_3 = \frac{v_1}{\mu g} + \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2} = t_1 + \frac{\pi}{2\omega_2} + \frac{v_1}{\mu g},$$

a közös sebesség az összetapadás után pedig

$$(16) \quad v_3 = -\frac{\mu g\pi}{2\omega_2} = -\frac{\mu g\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{D}}.$$

A (III) feltétel teljesülése esetén a kocsi és a láda sebességének a (2), (10), (11), (13) és (16) egyenlet szerinti időfüggését a 3. ábrán foglaltuk össze. Érdekes, hogy a visszalökődés utáni (16) sebesség nem függ v_0 -tól.

1986-05-236-1.eps

3. ábra

Ha

$$(II) \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2/8}} \leq \frac{\mu g}{v_0} \sqrt{\frac{2M}{D}} < 1,$$

akkor, mint már említettük, a láda előbb tapad a kocsihoz, mint ahogy a kocsi elhagyja a rugót. A csúszás megszűnésének t_2' időpontja a

$$(17) \quad v_1 - \mu g(t_2' - t_1) = A_2\omega_2 \cos [\omega_2(t_2' - t_1) + \varphi_2]$$

egyenletből határozható meg. Az egyenletet algebrai módszerekkel nem lehet megoldani. A konkrét adatok ismeretében t_2 numerikusan meghatározható. t_2 időpontban a kocsi helye és sebessége:

$$(18) \quad y_2 = y_0 + A_2 \sin [\omega_2(t_2' - t_1) + \varphi_2],$$

$$(19) \quad v_2' = A_2 \omega_2 \cos [\omega_2(t_2' - t_1) + \varphi_2].$$

Az összetapadás után a kocsi és a láda újból $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{2M}}$ frekvenciával rezeg a rugó nyugalmi helyzete körül. A rezgés új amplitúdója:

$$A_3 = \sqrt{y_2^2 + (v_2'/\omega_1)^2},$$

a fázis a t_2' időpontban pedig:

$$(21) \quad \varphi_3 = \arcsin \frac{y_2}{A_3} = \arccos \frac{v_2'}{A_3 \omega_1}.$$

A kétféle meghatározással φ_3 -at egyértelművé tettük a $[0, 2\pi)$ intervallumban. A kocsi és a láda közös sebessége a t_2' időpont után:

$$(22) \quad v(t) = A_3 \omega_1 \cos [\omega_1(t - t_2') + \varphi_3].$$

A t_3' időpontban a kocsi elhagyja a rugót. Ekkor a rezgés fázisa:

$$(23) \quad \omega_1(t_3' - t_2') + \varphi_3 = \pi,$$

ebből

$$(24) \quad t_3' = t_2' + \frac{\pi - \varphi_3}{\omega_1}.$$

A rugó elhagyása után a kocsi sebessége állandó:

$$(24) \quad v_3' = -A_3 \omega_1.$$

A (II) feltétel teljesülése esetén a kocsi és a láda sebességének a (2), (10), (11), (22) és (24) egyenlet szerinti időfüggését a 4. ábrán foglaltuk össze.

1986-05-237-1.eps

4. ábra

Végül nézzük azokat az eseteket, amikor a kocsi nem elég hosszú, és a láda leesik róla! A láda maximális elmozdulása legyen L ! A láda leeshet (a) a rugó elhagyása előtt és (b) a rugó elhagyása után.

(a) A megcsúszás után a ládának a kocsihoz viszonyított elmozdulása:

$$(25) \quad l(t) = v_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\mu g(t - t_1)^2 - \{A_2 \sin [\omega_2(t - t_1) + \varphi_2] - A_2 \sin \varphi_2\}.$$

Amennyiben a (II) esetben a t_2' , a (III) esetben a t_2 időpont előtt $l(t) > L$ következne, a láda lecsúszik a kocsiról.

A leesés után a kocsi előbb $\omega_2 = \sqrt{\frac{D}{M}}$ frekvenciájú rezgőmozgást végez a rugó nyugalmi helyzete körül, majd a rugó elhagyása után állandó sebességgel halad tovább (lásd a 3. és 4. ábra szaggatott vonalait!).

(b) A (III) esetben a láda még lecsúszhat a rugó elhagyása után is. A t_2 időpont után a ládának a kocsihoz viszonyított elmozdulása:

$$l(t) = v_1(t - t_1) - \frac{1}{2}\mu g(t - t_1)^2 + y_1 - \left[-v_1(t - t_2) + \frac{1}{2}\mu g(t - t_2)^2 \right].$$

Ha a t_3 időpont előtt $l(t) > L$ következne, akkora láda lecsúszik a kocsiról (lásd a 3. ábra szaggatott vonalát!).

A láda mozgásának lehetőségeit az áttekinthetőség kedvéért az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

1986-05-238-1.eps