

a) A töltések elrendezése legyen az 1. ábrán látható! A 2. dipólusra ható erő a töltéseire ható Coulomb-erők előjeles összege, mivel minden erő a dipólusokat összekötő egyenes mentén hat. Az erő pozitív, ha az ábra jobb oldala felé mutat.

1986-01-033-1.eps

1. ábra

A 2. dipólus pozitív töltésére ható erő:

$$(1) \quad F_+ = kQ^2 \left[\frac{1}{\left(r - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{kQ^2}{r^2} \left[\frac{1}{\left\{1 - \frac{(d_1 + d_2)}{2r}\right\}^2} - \frac{1}{\left\{1 + \frac{(d_1 - d_2)}{2r}\right\}^2} \right].$$

A 2. dipólus negatív töltésére ható erő:

$$(2) \quad F_- = kQ^2 \left[\frac{1}{\left(r + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r - \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{kQ^2}{r^2} \left[\frac{1}{\left\{1 + \frac{(d_1 + d_2)}{2r}\right\}^2} - \frac{1}{\left\{1 - \frac{(d_1 - d_2)}{2r}\right\}^2} \right].$$

Így a 2. dipólusra ható erő

$$(3) \quad F_2 = F_+ + F_-.$$

Tudjuk, hogy $d_1 \ll r$, $d_2 \ll r$, ezért $\frac{d_1}{r} \ll 1$, $\frac{d_2}{r} \ll 1$.

Használjuk fel az ismert

$$(4) \quad (1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \delta(\varepsilon^2), \quad \text{ha } \varepsilon \ll 1$$

közelítést! Ekkor

$$F_+ = \frac{kQ^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{d_1 + d_2}{r} + \delta O \left[\left(\frac{d_1 + d_2}{r} \right)^2 \right] \right\} - \frac{kQ^2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{d_1 - d_2}{r} + \delta O \left[\left(\frac{d_1 - d_2}{r} \right)^2 \right] \right\} =$$

$$= \frac{kQ^2}{r^2} \left[\frac{2d_1}{r} + \delta O \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right],$$

ahol az $\delta O(d^2/r^2)$ szimbólum azt jelzi, hogy az elhanyagolt tagok a d_1/r és d_2/r kicsiny mennyiségek szorzatát vagy többszörös szorzatát tartalmazhatják csak.

Ugyanígyen pontossáig:

$$F_- = \frac{kQ^2}{r^2} \left\{ 1 - \frac{d_1 + d_2}{r} + \delta O \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right\} - \frac{kQ^2}{r^2} \left\{ 1 + \frac{d_1 - d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right\} =$$

$$= \frac{kQ^2}{r^2} \left[-\frac{2d_1}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right].$$

A dipólusra ható erő:

$$F_2 = F_+ + F_- = \frac{kQ^2}{r^2} \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right).$$

Azt tapasztaljuk, hogy a kiszámított tagok éppen kiejtették egymást, az eredmény csak az elhanyagolt tagok nagyságrendjéről ad felvilágosítást. Az (1)–(3) kifejezésekből látható, hogy F_2 nem pontosan 0, így közelítésünk túl durva volt. Pontosabb közelítést kaphatunk, ha a (4) összefüggést $\delta(\varepsilon^3)$ pontossáig írjuk fel, és ezt alkalmazzuk F_2 kiértékelésére. Azonban egy egyszerűbb módon is célhoz érhetünk. (1) és (2) összeadásával, közös nevezőre hozás után az F_2 erőre az

$$F_2 = \frac{2kQ^2}{r^2} \left\{ \frac{1 + \left(\frac{d_1 + d_2}{2r}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{d_1 + d_2}{2r}\right)^2\right]^2} - \frac{1 + \left(\frac{d_1 - d_2}{2r}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{d_1 - d_2}{2r}\right)^2\right]^2} \right\}$$

összefüggést nyerjük. A zárójel mindkét tagja $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ alakú, ahol $x \ll 1$.

A közelítő számítás összefüggéseit használva :

$$\begin{aligned} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} &= (1+x^2)[1+2x^2+\delta(x^4)] = \\ &= 1+x^2+2x^2+2x^4+\delta(x^4)+x^2\delta(x^4) = 1+3x^2+\delta(x^4). \end{aligned}$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{2kQ^2}{r^2} \left\{ \left[1 + 3 \left(\frac{d_1 + d_2}{2r}\right)^2 + \delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right) \right] - \left[1 + 3 \left(\frac{d_1 - d_2}{2r}\right)^2 + \delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2kQ^2}{r^2} \left[\frac{12d_1d_2}{4r^2} + \delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right) \right] = \frac{6kQ^2d_1d_2}{r^4} + \frac{2kQ^2}{r^2} \delta\left(\frac{d^4}{r^4}\right). \end{aligned}$$

Ez a 2. dipólusra ható erő legalacsonyabb rendű közelítése. Mivel $d_1 \ll r$, $d_2 \ll r$, ezért azt mondhatjuk, hogy jó közelítéssel

$$F_2 \approx \frac{2kQ^2d_1d_2}{r^4}.$$

Az 1. dipólusra ható erő ugyanekkora, csak ellentétes irányú. A fenti eredmény előjele pozitív, tehát a dipólusok taszítják egymást.

1986-01-034-1.eps

2. ábra

b) A töltések elrendezése legyen a 2. ábrán látható! Az ábra szimmetrikus elrendezése miatt a 2. dipólus pozitív töltésére ható erők eredője balra mutat, míg a negatív töltésre hatóké jobbra mutat. Ezen két erő eredője hat a 2. dipólusra, ami nyilvánvalóan merőleges lesz a két dipólust összekötő egyenesre. Az erő pozitív, ha az ábrán balra mutat.

A rajz jelöléseivel

$$F_2 = F_+ - F_-, \quad F_+ = 2F_{++} \sin \alpha, \quad F_- = 2F_{--} \sin \beta,$$

ahol

$$\begin{aligned} F_{++} &= \frac{kQ^2}{\left(r - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}, & F_{--} &= \frac{kQ^2}{\left(r + \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}, \\ \sin \alpha &= \frac{d_1/2}{\sqrt{\left(r - \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}}, & \sin \beta &= \frac{d_1/2}{\sqrt{\left(r + \frac{d_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_1}{2}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Felhasználva az előbbi összefüggéseket:

$$F_2 = kQ^2 d_1 \left\{ \frac{1}{\left[\left(r - \frac{d_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{1}{\left[\left(r + \frac{d_2}{2} \right)^2 + \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 \right]^{3/2}} \right\} =$$

$$= \frac{kQ^2 d_1}{r^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2} \right)^{3/2}} - \frac{1}{\left(1 + \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2} \right)^{3/2}} \right].$$

Számoljuk ki az első tagot $\delta(d^2/r^2)$ pontossáig:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2} \right)^{3/2}} = \frac{1}{\left[1 - \frac{d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right]^{3/2}} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} \left[\frac{d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right] + \delta \left\{ \left[\frac{d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right]^2 \right\} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right).$$

Ugyanígy számolva a másik tagot:

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{d_2}{r} + \frac{d_1^2 + d_2^2}{4r^2} \right)^{3/2}} = 1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right).$$

Visszahelyettesítve

$$F_2 = \frac{kQ^2 d_1}{r^3} \left\{ \left[1 + \frac{3d_2}{2r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right] - \left[1 - \frac{3d_2}{2r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{kQ^2 d_1}{r^3} \left[\frac{3d_2}{r} + \delta \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right] = \frac{3kQ^2 d_1 d_2}{r^3} + \frac{kQ^2}{r^2} \delta \left(\frac{d^3}{r^3} \right).$$

Tehát jó közelítéssel

$$F_2 \approx \frac{3kQ^2 d_1 d_2}{r^3}.$$

Az erő előjele pozitív, így a 2. dipólusra ható erő merőleges az összekötő szakaszra és balra mutat.