

A homokzsák mozgását három szakaszra bonthatjuk:

1. Az α szögben, v kezdősebességgel elhajított zsák $s_1 = (2v^2/g) \sin \alpha \cos \alpha$ távolságban zuhan a jégre.

2. Az ütközés a jéggel tökéletesen rugalmatlan. A zsák igen rövid Δt idő alatt elveszíti a függőleges irányú lendületét egy viszonylag nagy F függőleges nyomóerő hatására: $F \cdot \Delta t = mv \sin \alpha$. Az ütközés alatt a súrlódási erő ennek a nyomóerőnek μ -szöröse. Ez a súrlódási erő vízszintes irányú $\mu F \cdot \Delta t$ lendületváltozást okoz, ami az előbbi összefüggés miatt $\mu F \cdot \Delta t = mv\mu \sin \alpha$. Ezért az ütközés során a zsák vízszintes irányú sebességváltozása $v\mu \sin \alpha$. Az ütközés után a zsák sebessége tehát vízszintes, a sebesség nagysága pedig $v(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$, ha $\tan \alpha < 1/\mu$. Ha $\tan \alpha \geq 1/\mu$, akkor a zsák az ütközéskor megáll.

3. A zsák a jégen csúszva egyenletes μg lassulással megáll. Ez alatt a megtett út:

$$s_2 = \frac{v^2(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2}{2\mu g}.$$

A zsák végül $s = s_1 + s_2$ távolságra került,

$$s = \frac{v^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{v^2}{2\mu g} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2 = \frac{v^2}{2\mu g} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2,$$

s akkor maximális, ha $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$ maximális. Válasszunk olyan ε számot, amelyre $\tan \varepsilon = \mu$! Ekkor

$$\cos \alpha + \mu \sin \alpha = \frac{\cos \varepsilon \cos \alpha + \sin \varepsilon \sin \alpha}{\cos \varepsilon} = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varepsilon}.$$

Ez utóbbi kifejezés mint α függvénye akkor maximális, ha $\alpha = \varepsilon$, vagyis $\tan \alpha = \mu$. Teljesülnie kell a csúszás feltételének:

$$\tan \alpha = \mu < 1/\mu, \quad \text{vagyis annak, hogy} \quad \mu < 1.$$

Ha $\mu < 1$, akkor a maximális távolságra μ -tól függetlenül $\alpha = 45^\circ$ szögben hajítható el a zsák, amely ilyenkor a földetérés után már nem fog csúszni.

A feladatban $\mu = 0,035$, így $\alpha = 2^\circ$.

Megjegyzés. Az ütközés alatti lendületváltozásokra kapott eredmények akkor is igazak, ha az F nyomóerő időben nem állandó. Ilyenkor a függőleges lendületváltozás:

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} F dt = mv \sin \alpha,$$

a vízszintes pedig:

$$\int_{t_2}^{t_2+\Delta t} \mu F dt = mv\mu \sin \alpha.$$