

A feladatban feltett kérdés megtévesztő volt. A helyesen feltett kérdés így hangzik: Mekkora a felületi energia változása, illetve a buborékban levő túlnyomás (görbületi nyomás) ellen végzett munka?

Számoljuk ki először a felületi energia változását! A felületi energia megváltozása a felület ΔA megnövelésekor: $\Delta E = \alpha \cdot \Delta A$, ahol α a felületi feszültség. Így

$$E_2 - E_1 = \alpha(A_2 - A_1),$$

ahol $A_2 - A_1$ az összfelület (külső és belső) megváltozása.

$$A_2 - A_1 = 2 \cdot (4\pi R_2^2 - 4\pi R_1^2),$$
$$E_2 - E_1 = 8\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2) = 0,0014 \text{ J.}$$

A felületi energia változása tehát 0,0014 J.

Most határozzuk meg a túlnyomás ellen végzett munkát! A szappanbuborékot csak lassan tudjuk felfújni, ezért a belső nyomása (p) a külső légköri nyomás (p_0) és a túlnyomás, vagy más néven görbületi nyomás (p_g) összege:

$$p = p_0 + p_g.$$

Határozzuk meg p_g értékét! A buborék egy főkörre mentén a felületi feszültségből adódó erő $F_f = 2\alpha 2r\pi$, ahol α a felületi feszültség, r a gömb sugara. (A buborékhártyának két szabad felszíne van, ezért szerepel a kettős szorzótényező.) Ez az erő a főkör $r^2\pi$ területén hat, az általa okozott túlnyomás:

$$p_g = 4\alpha r\pi / r^2\pi = 4\alpha / r.$$

A túlnyomás a sugár növelésével csökken, így a $\Delta W = p_g \Delta V$ összefüggéssel csak kis ΔV térfogatváltozás esetén tudjuk meghatározni a munkavégzést. Gömb esetén $\Delta V = A \cdot \Delta r$, így $W = p_g A \cdot \Delta r$, ezért ezt a munkát egy

$$F = p_g A = (4\alpha / r) \cdot 4\pi r^2 = 16\pi\alpha r$$

erő munkájának lehet tekinteni. F az r sugárnak lineáris függvénye, így a teljes munkát

$$F_{\text{átl}} = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

átlagos erővel számíthatjuk:

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (R_2 - R_1) = 16\pi\alpha \cdot \frac{R_2 + R_1}{2} \cdot (R_2 - R_1) = 8\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2).$$

A görbületi nyomás ellen végzett munka tehát megegyezik a felületi energia változásával. Ez természetes is, hiszen a görbületi nyomás ellen végzett munka és a felületi energia olyan viszonyban van egymással, mint a gravitációs erő ellen végzett munka és a helyzeti energia.