

A feladatban feltett kérdés megtévesztő volt. A helyesen feltett kérdés így hangzik: Mekkora a felületi energia változása, illetve a buborékban levő túlnyomás (görbületi nyomás) ellen végzett munka?

Számoljuk ki először a felületi energia változását! A felületi energia megváltozása a felület  $\Delta A$  megnövelésekor:  $\Delta E = \alpha \cdot \Delta A$ , ahol  $\alpha$  a felületi feszültség. Így

$$E_2 - E_1 = \alpha(A_2 - A_1),$$

ahol  $A_2 - A_1$  az összfelület (külső és belső) megváltozása.

$$\begin{aligned} A_2 - A_1 &= 2 \cdot (4\pi R_2^2 - 4\pi R_1^2), \\ E_2 - E_1 &= 8\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2) = 0,0014 \text{ J}. \end{aligned}$$

A felületi energia változása tehát 0,0014 J.

Most határozzuk meg a túlnyomás ellen végzett munkát! A szappanbuborékot csak lassan tudjuk felfújni, ezért a belső nyomása ( $p$ ) a külső légköri nyomás ( $p_0$ ) és a túlnyomás, vagy más néven görbületi nyomás ( $p_g$ ) összege:

$$p = p_0 + p_g.$$

Határozzuk meg  $p_g$  értékét! A buborék egy főkörre mentén a felületi feszültségből adódó erő  $F_f = 2\alpha 2r\pi$ , ahol  $\alpha$  a felületi feszültség,  $r$  a gömb sugara. (A buborékhártyának két szabad felszíne van, ezért szerepel a kettős szorzótényező.) Ez az erő a főkör  $r^2\pi$  területén hat, az általa okozott túlnyomás:

$$p_g = 4\alpha r\pi / r^2\pi = 4\alpha / r.$$

A túlnyomás a sugár növelésével csökken, így a  $\Delta W = p_g \Delta V$  összefüggéssel csak kis  $\Delta V$  térfogatváltozás esetén tudjuk meghatározni a munkavégzést. Gömb esetén  $\Delta V = A \cdot \Delta r$ , így  $W = p_g A \cdot \Delta r$ , ezért ezt a munkát egy

$$F = p_g A = (4\alpha / r) \cdot 4\pi r^2 = 16\pi\alpha r$$

erő munkájának lehet tekinteni.  $F$  az  $r$  sugárnak lineáris függvénye, így a teljes munkát

$$F_{\text{átl}} = \frac{F_1 + F_2}{2}$$

átlagos erővel számíthatjuk:

$$W = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot (R_2 - R_1) = 16\pi\alpha \cdot \frac{R_2 + R_1}{2} \cdot (R_2 - R_1) = 8\pi\alpha(R_2^2 - R_1^2).$$

A görbületi nyomás ellen végzett munka tehát megegyezik a felületi energia változásával. Ez természetes is, hiszen a görbületi nyomás ellen végzett munka és a felületi energia olyan viszonyban van egymással, mint a gravitációs erő ellen végzett munka és a helyzeti energia.