a) Az elrendezés szimmetriája miatt nyilvánvaló, hogy a feladatban megadott e egyenes mentén a térerősségnek csak az egyenes irányába eső komponense van, amely a négy ponttöltés által keltett térerősség összege. Ez a négyzet síkjától $\overline{OP} = z$ távolságra levő P pontban (l. az ábrát):

$$E_z = 4\frac{kQ}{r^2}\cos\alpha = 4kQ\frac{z}{\left(\frac{a^2}{2}+z^2\right)^{3/2}}, \tag{1}$$

ahol k a Coulomb állandó.

1985-11-414-2.eps

b) Ha $z \ll a$, a akkor a térerősség (1) kifejezésében

$$a^2/2 + z^2 \approx a^2/2,$$

így a P pontba helyezett q töltésre

$$F_z = Eq \approx 8\sqrt{2}k\frac{Qq}{a^3}z \tag{2}$$

erő hat. Ha feltételezzük, hogy $Qq < 0$ (ellentétes előjelű töltések) és a gravitációtól eltekintünk, akkor az m tömegű, q töltésű test mozgásegyenlete a (2) egyenlet alapján

$$a_z = F_z/m = -\omega^2 z$$

alakba írható, amely a rezgőmozgás dinamikai feltétele, ahol

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{k\frac{8\sqrt{2}|Qq|}{a^3 m}}. \tag{3}$$

Adatainkkal (3)-ból a rezgés körfrekvenciája, illetve periódusideje

$$\omega \approx 1{,}3 \cdot 10^{16}\ (1/\mathrm{s}), \quad T = 4{,}7 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}.$$

c) Van olyan irány, amelybe a q töltésű testet kimozdítva az O középpontból, az a kimozdítás irányában gyorsul tovább. Ezt a következőképpen láthatjuk be: Helyezzük a q töltést a négyzet átlóján levő R pontba! Az $\overline{OR} = x$, $\overline{OC} = a/\sqrt{2} = b$ jelölésekkel a test helyzeti energiája az R pontban

$$\begin{aligned} V_R(x) &= kQq\left(\frac{1}{\overline{AR}} + \frac{1}{\overline{CR}} + \frac{1}{\overline{BR}} + \frac{1}{\overline{DR}}\right) = \\ &= kQq\left(\frac{1}{b-x} + \frac{1}{b+x} + \frac{2}{\sqrt{b^2+x^2}}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Mivel

$$\begin{aligned} V_R'(x) &= kQq\left[\frac{1}{(b-x)^2} - \frac{1}{(b+x)^2} - \frac{2x}{(b^2+x^2)^{3/2}}\right] = \\ &= 2kQqx\left[\frac{2b}{(b^2-x^2)^2} - \frac{1}{(b^2+x^2)^{3/2}}\right], \end{aligned}$$

azért $V_R'(0) = 0$; továbbá az $x = 0$ hely egy kis környezetében

$$x < 0 \text{ esetén } V_R(x) > 0, \quad x > 0 \text{ esetén } V_R(x) < 0, \tag{5}$$

ugyanis $Qq < 0$, és a legutóbbi szögletes zárójelben álló kifejezés az $x = 0$ hely egy környezetében pozitív, mivel $x = 0$ esetén értéke $1/b^3 > 0$. Ez azt jelenti, hogy a V_R függvénynek a 0 helyen lokális maximuma van, tehát a q töltés kis elmozdítása helyzeti energia csökkenéssel jár, vagyis az egyensúlyi helyzet az O pontban instabil. Másrészt világos, hogy a q töltésre az R pontban ható erők eredője átlóirányú, így $\overline{OR}$ valóban a kívánt irány.

Hasonló számolással kimutatható, hogy a négyzet középvonalai mentén történő (kis) elmozdítások esetén is teljesül a kívánt feltétel.