

Az egyensúlyi helyzetet a rendszerrel együtt forgó koordinátarendszerben keressük. Ha mindkét kötél feszes, a függő test helyzetét az 1. ábrán jelölt α szöggel jellemezhetjük. A testre ható erők: a $G = mg$ nagyságú súlyerő; az $F_c = mh \sin \alpha \cdot \omega^2$ nagyságú centrifugális erő, valamint a két kötél húzóereje.

1984-12-477-2.eps

1. ábra

A test akkor van egyensúlyban, ha a súlyerő és a centrifugális erő A pontra vonatkozó forgatónyomatékának összege zérus:

$$mh^2\omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - mgh \sin \alpha = 0.$$

Az egyenlet megoldásai:

$$\alpha = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{g}{\omega^2 h} \geq 1,$$

valamint

$$\alpha = 0 \quad \text{és} \quad \alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 h}, \quad \text{ha} \quad \frac{g}{\omega^2 h} < 1.$$

Ezek tehát a rendszer egyensúlyi helyzetei.

Vizsgáljuk meg a helyzetek stabilitását! Ehhez határozzuk meg a forgatónyomaték α szerinti deriváltját az α_0 egyensúlyi pontban. A forgatónyomaték pozitív forgásiránya egyezzen meg α pozitív forgásirányával! Mivel $M(\alpha_0) = 0$, így

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha_0 + \Delta\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{M(\alpha_0 + \Delta\alpha) - M(\alpha_0)}{\Delta\alpha} = M'(\alpha_0),$$

tehát elég kis $\Delta\alpha$ esetén $M(\alpha_0 + \Delta\alpha)$ ugyanolyan előjelű, mint $\Delta\alpha$, ha $M'(\alpha_0)$ pozitív és ellenkező előjelű, mint $\Delta\alpha$, ha $M'(\alpha_0)$ negatív. Ezért ha a derivált negatív, akkor kis kitérésekre a forgatónyomaték ellenkező előjelű, mint $\Delta\alpha$, tehát visszaviszi a testet az α_0 egyensúlyi helyzetbe, vagyis az egyensúlyi helyzet stabil. Ha a derivált pozitív, akkor a forgatónyomaték $\Delta\alpha$ -val azonos előjelű lesz, tehát tovább növeli a kitérést, vagyis az egyensúlyi helyzet instabil.

Az A pontra vonatkozó eredő forgatónyomaték:

$$M = mh^2\omega^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - mgh \sin \alpha,$$

ennek α szerinti deriváltja:

$$M'(\alpha) = mh^2\omega^2(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - mgh \cos \alpha.$$

Az egyensúlyi helyzetekben felvett érték:

$$M'(0) = m\omega^2 h^2 \left(1 - \frac{g}{\omega^2 h}\right),$$

$$M'\left(\arccos \frac{g}{\omega^2 h}\right) = m\omega^2 h^2 \left[\left(\frac{g}{\omega^2 h}\right)^2 - 1\right].$$

Tehát ha $\frac{g}{\omega^2 h} \geq 1$, akkor az $\alpha = 0$ az egyetlen egyensúlyi helyzet, és ez stabil, viszont ha $\frac{g}{\omega^2 h} < 1$, akkor az $\alpha = 0$ helyzet instabil, az $\alpha = \arccos \frac{g}{\omega^2 h}$ pedig stabil.

1984-12-478-1.eps

2. ábra

1984-12-478-2.eps

3. ábra

A 2. és 3. ábrán α -t, illetve a függő test és az A pont $h \cos \alpha$ szintkülönbségét láthatjuk h függvényében, rögzített ω mellett. A folytonos vonal stabil, a szaggatott instabil egyensúlyt jelöl.

Létrejöhet egy harmadik egyensúlyi helyzet is úgy, hogy az egyik fonál nem feszül. Vezessük be a 4. ábrán látható l , L és β paramétereket!

1984-12-478-3.eps

4. ábra

Az egyensúly feltétele:

$$m(l \sin \beta - L)\omega^2 \cos \beta - mg \sin \beta = 0.$$

Ez $\sin \alpha$ -ban negyedfokú egyenletre vezet.