

I. megoldás. A mágneses indukció kiszámításához először meg kell határozni az élekben folyó áramokat. Az 1. ábrán feltüntettük az egyes áramokat és irányukat. Az áramforrást a kocka A, B csúcsaira kötöttük.

1984-11-423-1.eps

1. ábra

1984-11-424-1.eps

2. ábra

Szimmetriaokok miatt a D és E pontok, valamint a C és F pontok ekvipotenciálisak, így összeköthetők egy zérus ellenállású huzallal. A kapott ellenálláshálózatot a 2. ábra mutatja. (Az ellenállásokba írt számok az 1. ábra áramainak sorszámozásával vannak összhangban.) A kiterített hálózat segítségével a Kirchhoff-törvények alapján könnyen meghatározhatjuk az egyes élekben folyó áramokat, ezek a következők:

$$\begin{aligned} I_1 &= 2 \text{ A}, \\ I_2 &= I_3 = I_5 = I_6 = (5/7) \text{ A}, \\ I_4 &= I_7 = (4/7) \text{ A}, \\ I_8 &= I_9 = I_{10} = I_{11} = (1/7) \text{ A}, \\ I_{12} &= (2/7) \text{ A}. \end{aligned}$$

Az áramok irányait az 1. ábra mutatja.

A kocka középpontjából minden él azonos látószögben látszik és minden él azonos távolságra van ettől a ponttól. A mágneses indukciót a Biot–Savart-törvénnyel számítjuk ki. Egy él Δs elemi szakaszában folyó áram által keltett mágneses indukció a P pontban a 3. ábra jelöléseivel:

$$|\Delta \mathbf{B}(P)| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot \Delta s}{r^2} \sin \varphi,$$

ahol φ az elemi szakasz és az $\mathbf{r}$ vektor által bezárt szög. $\mathbf{B}$ irányát a jobbkéz-szabállyal határozhatjuk meg.

1984-11-424-2.eps

3. ábra

A teljes él járulékát a mágneses térhez úgy számíthatjuk ki, hogy vektoriálisan összegezzük az elemi szakaszokban folyó áram által létrehozott mágneses indukciókat. Könnyen látható, hogy a kocka középpontjában az egy él által létrehozott mágneses indukció nagysága az élben folyó árammal arányos. Az arányossági tényező az élek látószögétől és a P ponttól való távolságtól függ, tehát valamennyi élre ugyanakkora.

A jobb áttekinthetőség kedvéért a $\mathbf{B}_1 \dots \mathbf{B}_{12}$ indukcióvektorokat párosával ábrázoltuk a 4. ábrán. $I_4 = I_7$ és azonos irányúak, ezért $\mathbf{B}_4 + \mathbf{B}_7 = \mathbf{0}$. I_1 és I_{12} áramok tere ellentétes irányú, így $|\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{12}| = (12/7) \cdot |\mathbf{B}_0|$, ahol $|\mathbf{B}_0|$ az 1 A árammal átjárt él által létrehozott mágneses indukció nagysága a P pontban.

1984-11-424-3.eps

4.a ábra

1984-11-424-4.eps

4.b ábra

1984-11-424-5.eps

4.c ábra

A 4. b) ábrán az I_2 és I_9 , illetve az I_3 és I_8 áramok által keltett tereket ábrázoltuk. A négy indukcióvektor eredőjét az alábbiak alapján számolhatjuk ki:

$\mathbf{B}_2$ párhuzamos $\mathbf{B}_9$ -cel és $\mathbf{B}_3$ párhuzamos $\mathbf{B}_8$ -cal, mivel a megfelelő élek párhuzamosak. Másrészt az ábrából látható, hogy $(\mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_9)$ merőleges $(\mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_8)$ -ra, így $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_9 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_8$ nagysága

$$|\mathbf{B}'| = \sqrt{(|\mathbf{B}_2| + |\mathbf{B}_9|)^2 + (|\mathbf{B}_3| + |\mathbf{B}_8|)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{7}|\mathbf{B}_0|,$$

$\mathbf{B}'$ az xy síkkal párhuzamos irányú.

Hasonlóan látható, hogy $\mathbf{B}'' = \mathbf{B}_5 + \mathbf{B}_{11} + \mathbf{B}_6 + \mathbf{B}_{10}$ nagysága

$$|\mathbf{B}''| = \sqrt{(|\mathbf{B}_5| + |\mathbf{B}_{11}|)^2 + (|\mathbf{B}_6| + |\mathbf{B}_{10}|)^2} = \frac{6\sqrt{2}}{7}|\mathbf{B}_0|,$$

iránya pedig az yz síkkal párhuzamos.

$\mathbf{B}'$ merőleges $\mathbf{B}''$ -re és $\mathbf{B}' + \mathbf{B}''$ iránya éppen $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{12}$ irányával ellentétes. Másrészt $|\mathbf{B}' + \mathbf{B}''| = \sqrt{2}|\mathbf{B}'| = (12/7)|\mathbf{B}_0|$, ami éppen $|\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{12}|$ -vel egyezik meg. Tehát $\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_{12} + \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' = 0$.

A teljes áramrendszer által létrehozott eredő mágneses indukció a kocka közepén zérus.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a mágneses indukció értéke a kocka közepén zérus.

Bármely élben folyó áram indukcióvektora az élre merőleges, P ponton átmenő síkban fekszik, így nincs az éllel párhuzamos komponense (P a kocka középpontját jelöli). Mivel minden él ugyanakkora látószögben látszik a P -ből, a mágneses indukció arányos az élben folyó árammal és az arányossági tényező ugyanaz minden áramra. Egy indukcióvektornak a megfelelő tengelyekre vett komponensei a P pont kitüntetett helyzete miatt abszolút értékben azonos nagyságúak. Például az 1. ábrán feltüntetett koordináta-rendszerben az I_8 által létrehozott $\mathbf{B}_8$ indukcióvektorra igaz a

$$|(\mathbf{B}_8)_x| = |(\mathbf{B}_8)_y| = kI_8$$

egyenlőség, ahol k minden élre ugyanaz az állandó.

Vizsgáljuk először az eredő mágneses indukció z komponensét! Ekkor a fentiek alapján elegendő az x és y iránnyal párhuzamos élekben folyó áramok terét tekinteni. Így csak az $ABFE$ és $DCGH$ négyzet éleiben folyó áramok adnak járulékot a $\mathbf{B}_2$ komponenshez a P pontban. Az $ABFE$ hurokban folyó áramok terének z komponense: $k(I_1 - I_6 - I_7 - I_5)$. Ennek irányát legkönnyebben a jobbkéz-szabállyal állapíthatjuk meg. Szorozzuk meg ezt a mennyiséget az élek R ellenállásával. Ekkor az előbbi kifejezés zárójelében az $(I_1R - I_6R - I_7R - I_5R)$ kifejezést, a hurokban levő ellenállásokon eső feszültségek algebrai összegét kapjuk. Kirchhoff huroktörvénye alapján ez a kifejezés zérus. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy a $DCGH$ hurokban folyó áramok terének z komponense is zérus a P pontban.

Ezzel beláttuk, hogy az összes áram eredő mágneses indukciójának z irányú komponense a kocka középpontjában zérus.

Az előbbi indokláshoz hasonlóan kapjuk, hogy az eredő mágneses indukció x , ill. y irányú komponense a kocka középpontjában zérus. Így az eredő mágneses tér a kocka középpontjában zérus.

A bizonyításhoz csak azt használtuk fel, hogy a P pontból azonos látószögben látjuk az összes élt és minden él azonos ellenállású. Az előbbi két feltétel akkor is teljesül, ha a kocka bármely másik két csúcsára kötjük az áramforrást, így a mágneses tér minden esetben zérus a kocka közepén.