

A q töltésre az ábrákon látható három erő hat: a K nagyságú kötél-erő, a töltések közti F nagyságú Coulomb-erő és az mg nagyságú súlyerő.

1984-04-184-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán az $\alpha \leq 90^\circ$, a 2. ábrán a $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ eset látható. A kitűzés ábrája azt sugallja, hogy α legfeljebb 90° lehet (ezt a megoldások értékelésénél figyelembe is vettük), mi azonban foglalkozunk az általános esettel! A töltések d távolsága az ABO egyenlő szárú háromszögből $d = 2l \sin(\alpha/2)$. Így az F Coulomb-erő:

$$(1) \quad F = k \frac{Qq}{4l^2 \sin^2(\alpha/2)}.$$

Írjuk fel az egyensúly feltételét úgy, hogy az erőket az OB egyenessel párhuzamos, illetve rá merőleges irányú összetevőkre bontjuk:

$$(2) \quad K = mg \cos \alpha + F \sin(\alpha/2).$$

$$(3) \quad F \cos(\alpha/2) = mg \sin \alpha.$$

(Az egyenletek $0 < \alpha \leq 180^\circ$ esetén érvényesek.) (1) és (3) alapján kapjuk, hogy egyensúly csak olyan α szög esetében lehetséges, amelyre

$$\left[k \frac{Qq}{4l^2 \sin^2(\alpha/2)} - mg \sin(\alpha/2) \right] \cos(\alpha/2) = 0;$$

azaz vagy

$$a) \cos(\alpha/2) = 0, \alpha/2 = 90^\circ, \alpha = 180^\circ, \quad (4)$$

vagy

$$b) \sin(\alpha/2) = \sqrt[3]{\frac{kQq}{8mgl^2}}. \quad (5)$$

A (2) egyenlet alapján az $a)$ eset megvalósulásához szükséges, hogy

$$F - mg \geq 0,$$

azaz

$$(6) \quad K = k \frac{Qq}{4l^2} - mg \geq 0$$

legyen, hiszen K a kötél-erő abszolút értékét jelöli.

1984-04-184-2.eps

2. ábra

A $b)$ eset megvalósulásához egyrészt (5) alapján szükséges feltétel:

$$(7) \quad \frac{kQq}{8mgl^2} \leq 1.$$

Másrészt (2) miatt szükséges feltétel:

$$mg \cos \alpha + F \sin(\alpha/2) \geq 0,$$

azaz

$$K = mg \cos \alpha + \frac{kQq}{4l^2 \sin(\alpha/2)} \geq 0.$$

Ez a feltétel (5) alapján [ha (7) teljesül] így írható:

$$K = mg[\cos \alpha + 2 \sin^2(\alpha/2)] \geq 0,$$

$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ miatt

$$(8) \quad K = mg,$$

és így az egyenlőtlenség mindig teljesül.

Tekintve, hogy a (2), (3) egyenletek az egyensúly *szükséges* és *elégleges* feltételét adják meg, azért összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg:

$$(9) \quad \frac{kQq}{8mgl^2} \geq 1$$

esetén csak $\alpha = 180^\circ$ mellett van egyensúly (l. a (6), (7) egyenlőtlenségeket!). Ekkor a kötélerő a (6) képletből számolható.

$$(10) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{kQq}{8mgl^2} < 1$$

esetén egyensúly van $\alpha = 180^\circ$ mellett és az (5) feltételből adódó α szög mellett is, és K (6), illetve (8) alapján számolható.

Végül

$$(11) \quad \frac{kQq}{8mgl^2} < \frac{1}{2}$$

esetén az (5) feltételnek eleget tevő α szög mellett van egyensúly, ekkor K értékét (8) adja.

Belátható, hogy a (10) feltétel teljesülése esetén az $\alpha = 180^\circ$ labilis egyensúlyi helyzetet jelent, az (5) feltételből adódó α szög pedig stabil egyensúlyi helyzetet jelent. A feladat számadataival csak az $\alpha \approx 60^\circ$ szög adódik az egyensúlyi helyzetre [ekkor (11) teljesül] és $K = mg = 9,81 \cdot 10^{-3}$ N.