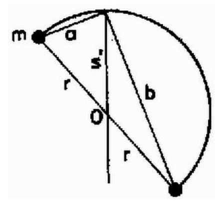
I. megoldás. Tudjuk, hogy a fizikai inga lengésideje $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{\Theta}{MgS}}$, ahol Θ a forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték, M az inga tömege, S pedig a tömegközéppont és a forgástengely távolsága. A rendszer geometriájából adódóan $S = r$ minden felfüggesztésre (1. ábra).



1. ábra

A tehetetlenségi nyomaték definíció szerint

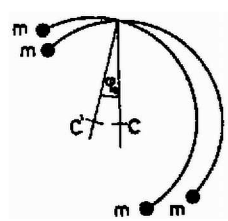
$$\Theta = m(a^2 + b^2).$$

Thalész és Pitagorasz tétele miatt $a^2 + b^2 = 4r^2$. Így $\Theta = 4mr^2$. Az inga tömege $M = 2m$, ezért a lengésidő $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2r}{g}}$ vagyis független az alátámasztás helyétől. Mivel gondolatmenetünk alkalmazható a tömegpontoknál történő alátámasztásra is, a lengésidő ezekre a helyzetekre is ennyi.

Bihary Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, mennyivel nő meg a rendszer helyzeti energiája kicsiny φ_0 szögű kitérítésnél. A tömegközéppont C-ből C'-be kerül (2. ábra), így a helyzeti energia növekedése

$$\Delta E = 2mgr(1 - \cos\varphi_0).$$



2. ábra

Kis szögekre $\cos\varphi_0 \approx 1 - \varphi_0^2/2$, így $\Delta E = mgr\varphi_0^2$.

A középső helyzetben ez teljes egészében forgási energiává alakul, vagyis $(1/2)\Theta\Omega_0^2 = mgr\varphi_0^2$, ahol Ω_0 az inga maximális szögsebessége. Ebből

$$\frac{\Omega_0}{\varphi_0} = \sqrt{\frac{2mgr}{\Theta}}. \tag{1}$$

Legyen a rezgés körfrekvenciája ω. Ekkor a szögkitérés az idő függvényében $\varphi = \varphi_0 \sin\omega t$, a szögsebesség $\Omega = \varphi_0\,\omega\,\cos\omega t$.

Ebből $\Omega_0 = \varphi_0 \cdot \omega$, így $\dfrac{\Omega_0}{\varphi_0} = \omega$. Ezt (1)-gyel összevetve $\omega = \sqrt{\dfrac{2mgr}{\Theta}}$, vagyis

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{2mgr}}.$$

Θ az előző megoldás szerint határozható meg.