

Először a rendszer egyensúlyi helyzetét keressük meg.

A rúdra a következő erők hatnak:

1. a kötéltől kifejtett m_2g nagyságú erő, amely a rúddal β szöget zár be;
2. a rúd m_1g súlya, amely függőleges irányú;
3. a csukló által kifejtett F erő, amely a rúddal δ szöget zár be.

1984-03-134-1.eps

Az ABC háromszög egyenlőszárú, ezért

$$(1) \quad \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

A rúd egyensúlyának szükséges és elégséges feltétele:

1. a rúdra ható erők eredője nulla legyen;
 2. a rúdra ható erők forgatónyomatékainak összege egy adott pontra – pl. az A pontra – véve nulla legyen.
- Az 1. feltétel két egyenletet ad, egyet a rúd irányú, egyet az arra merőleges erők egyenlőségéből:

$$(2) \quad F \cos \delta = m_1g \cos \alpha + m_2g \cos \beta,$$

$$(3) \quad F \sin \delta + m_2g \sin \beta = m_1g \sin \alpha.$$

A forgatónyomatékokra vonatkozó egyenlet:

$$(4) \quad m_1g(l/2) \sin \alpha - m_2gl \sin \beta = 0.$$

1984-03-134-2.eps

A (4) egyenletet tovább alakíthatjuk a

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \sin \beta = \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2}$$

azonosságok felhasználásával:

$$m_1gl \cos \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{m_2}{m_1} \right) = 0.$$

Mivel esetünkben $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, ezért szükségképpen

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{m_2}{m_1} = 0,25; \quad \alpha = 28,95^\circ, \quad \beta = 75,53^\circ.$$

Most határozzuk meg, milyen erővel hat a rúd a tengelyre! α és β értékek ismeretében (2)-ből és (3)-ból a következő egyenleteket nyerjük:

$$F \cos \delta = 93,75 \text{ N}, \quad F \sin \delta = 24,2 \text{ N}.$$

Az egyenletek négyzetösszegéből $1 = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta$ miatt

$$F = \sqrt{93,75^2 + 24,2^2} \text{ N} = 96,82 \text{ N}.$$

Az egyenletek hányadosából $\tan \delta$ -ra kapunk értéket. Az ennek megfelelő szög $\delta = 14,47^\circ$.

Mivel a kapott α , β , F , δ kielégítik az egyensúly szükséges és elégséges feltételét megadó (1)–(4) egyenleteket, azért valóban létrejön az egyensúly.

Vizsgáljuk meg, milyen ez az egyensúlyi helyzet!

Ha a rudat egyensúlyi helyzetéből lefelé mozdítjuk, α nő, β csökken, így a forgatónyomaték

$$m_1g(l/2) \sin \alpha - m_2gl \sin \beta > 0,$$

tehát az m_1g súlyerő forgatónyomatéka nagyobb lesz a kötélrő forgatónyomatékánál, és a rúd leesik az asztallapra.

Ha a rudat felfelé mozdítjuk, akkor α csökken, így β növekszik, tehát

$$m_1g(l/2) \sin \alpha - m_2gl \sin \beta < 0,$$

vagyis a kötélrő forgatónyomatéka nagyobb lesz a súlyerő forgatónyomatékánál, és a rúd a függőleges helyzetig emelkedik.

Tehát az $\alpha = 28,95^\circ$ szögű egyensúly labilis.

Megjegyzés. Az elrendezésnek van két stabil egyensúlyi helyzete, amit nem tartalmaznak egyenleteink.

1. $\alpha = 0^\circ$. Ekkor a csiga egyenlíti ki a lelógó súly nyomatékát.

2. $\alpha = 90^\circ$. Az asztallapon fekvő rúd is egyensúlyban van.

Ez az a két egyensúlyi helyzet, amely felé a labilis egyensúlyi helyzetből kimozdított rúd mozog.