I. megoldás. Az l hosszúságú rézhuzalon Δt idő alatt

$$Q = I^2 R(T)\cdot \Delta t \tag{1}$$

Joule hő fejlődik. ($R(T)$ a huzal ellenállását jelöli T hőmérsékleten.) A fajlagos ellenállás hőfokfüggéséből:

$$R(T) = (\varrho_0 l/A)[1+\alpha(T-T_0)]. \tag{2}$$

A rövid Δt idő alatt a vezeték hőmérsékletváltozása legyen ΔT, így az általa felvett hő

$$Q = cm\Delta T, \tag{3}$$

ahol $c = 385$ J/kg°C, a réz fajhője, amelyről feltesszük, hogy nem függ a hőmérséklettől; m az l hosszúságú huzal tömege,

$$m = \varrho_r Al, \tag{4}$$

$\varrho = 8{,}96\cdot 10^3$ kg/m^3 a rézhuzal sűrűsége.

Mivel a sugárzási veszteségektől eltekintünk, az (1) Joule hő egyenlő a (3) hőfelvétellel. Így felhasználva a (2) és (4) összefüggést, rendezés után kapjuk:

$$\Delta T/\Delta t = (I/A)^2\cdot(\varrho_0/c\varrho_r)[1+\alpha(T-T_0)]. \tag{5}$$

Az (5) összefüggés alapján numerikusan számoljuk ki azt az időt, amíg a huzal eléri a $T_{\rm olv}$ olvadáspontot ($T_{\rm olv} = 1356$ K). Osszuk fel a $[T_0, T_{\rm olv}]$ hőmérséklet intervallumot n egyenlő részre. Ekkor

$$\Delta T = \frac{T_{\rm olv}-T_0}{n}.$$

Az i-edik hőmérséklet intervallumhoz Δt_i idő tartozik. Így az olvadásig eltelt idő:

$$t = \sum_{i=1}^{n}\Delta t_i.$$

A Δt_i értékeket az (5) alapján számolhatjuk:

$$\Delta t_i = \frac{1}{(I/A)^2(\varrho_0/c\varrho_r)}\cdot\frac{\Delta T}{1+\alpha(T_i-T_0)},$$

ahol $T_i = T_0 + i\Delta T = T_0 + i\,\dfrac{T_{\rm olv}-T_0}{n}$ az i-edik intervallumra jellemző hőmérséklet.

Végül az előző két kifejezés alapján

$$i = \frac{1}{(\varrho_0/c)(I/A)^2}(T_{\rm olv}-T_0)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i\alpha(T_{\rm olv}-T_0)}. \tag{6}$$

A (6) kifejezés alapján $n = 250$ felosztás esetén t-re a következő numerikus értéket kapjuk zsebszámológéppel: $t = 23{,}01\ \text{s}\approx 23$ s.

A rézhuzal szerkezetének inhomogenitása miatt nem a teljes huzal kezd el olvadni, hanem csak egy bizonyos pontja. Az olvadási idő igen rövid, körülbelül $1-2$ s lehet. (Számszerűen az olvadás idejének csak a nagyságrendjét tudjuk megadni.) Ezért a huzal elszakadásáig eltelt idő $23-25$ s nagyságú.

II. megoldás. Induljunk ki az (5) kifejezésből. $\Delta t\to 0$ esetén a bal oldal határértéke

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{{\rm d}T}{{\rm d}t}.$$

Ez pedig a hőmérséklet idő szerinti differenciálhányadosa. Így (5) alapján

$$\frac{{\rm d}T}{{\rm d}t} = \left(\frac{I}{A}\right)^2\frac{\varrho_0}{c\varrho_r}[1+\alpha(T-T_0)]. \tag{7}$$

Vezessük be a $T^* = 1+\alpha(T-T_0)$ új változót. Ekkor (7) új alakja

$$\frac{{\rm d}T^*}{{\rm d}t} = B\cdot T^*,\qquad \text{ahol } B = \left(\frac{I}{A}\right)^2\frac{\varrho_0\alpha}{c\varrho_r}.$$

Ennek az összefüggésnek (ún. differenciálegyenletnek) eleget tesznek a $T^*(t) = De^{Bt}$ képlettel megadott függvények (D tetszőleges állandó lehet). Továbbá ismeretes, hogy ha egy függvény egy intervallumon kielégíti a fenti differenciálegyenletet, akkor szükségképpen $T^*(t) = De^{Bt}$ alakú.

A D együtthatót a kezdeti $t = 0$ időpillanatban felvett T^* alapján határozhatjuk meg. $T^*(0) = D = 1$. Az utóbbi egyenlőséget abból kapjuk, hogy $t = 0$-nál $T = T_0$, és így $T^*(0) = 1$. Tehát

$$T(t) = T_0 + (1/\alpha)(e^{Bt} - 1).$$

Ha az olvadásig eltelt idő t, akkor $T(t) = T_{\text{olv}}$. Ebből

$$t = (1/B)\ln[1 + \alpha(T_{\text{olv}} - T_0)] = \frac{1}{(I/A)^2(\varrho_0\alpha/c\varrho_r)}[\ln 1 + \alpha(T_{\text{olv}} - T_0)].$$

Numerikusan számolva $t = 23{,}1$ s.