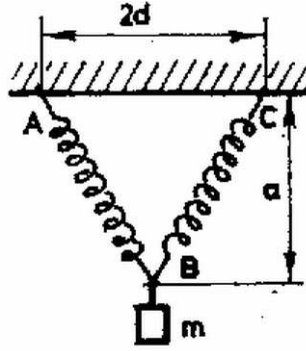




Egyensúly esetén egy-egy rugóban $F(a)$ erő hat. Írjuk fel az egyensúly feltételét! A két rugóban fellépő erő vízszintes komponensének eredője zérus. A függőleges komponensek összege megegyezik az m tömegű test súlyával:

$$(1) \quad 2F(a) \frac{a}{\sqrt{d^2 + a^2}} = mg.$$

Innen $F(a)$ értéke meghatározható.

Ha az m tömegű test az egyensúlyi helyzethez képest x távolsággal mozdul el függőleges irányban, akkor az egyik rugóban ébredő erő

$$(2) \quad F(a + x) = F(a) + D(\sqrt{d^2 + (a + x)^2} - \sqrt{d^2 + a^2}).$$

A testre ható eredő erő vízszintes komponense zérus és a függőleges komponense

$$(3) \quad F_y = mg - 2F_y(a + x),$$

ahol $F_y(a + x)$ az egyik rugóban fellépő erő függőleges komponense. Ha sikerülne F_y -t úgy felírni, hogy arányos legyen az $(a + x)$ kitéréssel, akkor az arányossági tényező megadná a rendszer D' direkciós erejét és ebből a rezgésidő meghatározható lenne:

$$(4) \quad F_y = D'x,$$

$$(5) \quad T = 2\pi\sqrt{m/D'}.$$

A rugóerő függőleges komponense

$$F_y(a + x) = F(a + x) \frac{a + x}{\sqrt{d^2 + (a + x)^2}}.$$

Az (1), (2) egyenletek alapján

$$(6) \quad \begin{aligned} F_y(a + x) &= \left[\frac{mg\sqrt{d^2 + a^2}}{2a} + D(\sqrt{d^2 + (a + x)^2} - \sqrt{d^2 + a^2}) \right] \frac{a + x}{\sqrt{d^2 + (a + x)^2}} = \\ &= \frac{mg}{2} \cdot \frac{x + a}{a} \cdot \frac{\sqrt{d^2 + a^2}}{\sqrt{d^2 + (a + x)^2}} + D(a + x) - D \frac{\sqrt{d^2 + a^2}}{\sqrt{d^2 + (a + x)^2}} (a + x). \end{aligned}$$

Ez a kifejezés sajnos nem arányos x -szel.

A feladat feltételei szerint $x \ll a$ Próbáljuk meg ekkor linearizálni az $F_y(a + x)$ kifejezést!

Először az alábbi közelítést végezzük el:

$$(7) \quad \begin{aligned} (\sqrt{d^2 + (a + x)^2})^{-1} &= \left(\sqrt{d^2 + a^2} \sqrt{1 + \frac{2ax}{d^2 + a^2} + \frac{x^2}{d^2 + a^2}} \right)^{-1} \approx \\ &\approx \left[\sqrt{d^2 + a^2} \sqrt{1 + \frac{2ax}{d^2 + a^2}} \right]^{-1} \approx \left[\sqrt{d^2 + a^2} \left(1 + \frac{ax}{d^2 + a^2} \right) \right]^{-1} \approx \frac{1}{\sqrt{d^2 + a^2}} \left(1 + \frac{ax}{d^2 + a^2} \right). \end{aligned}$$

A közelítések során először az $\frac{x^2}{d^2 + a^2}$ tagot elhagytuk, mert 1 mellett másodrendűen kicsi. Ezután sorrendben a következő közelítő formulákat alkalmaztuk:

$$\sqrt{1 + y} \approx 1 + y/2, \quad \text{ha } y \ll 1 \quad \text{és} \quad (1 + y)^{-1} \approx 1 - y, \quad \text{ha } y \ll 1.$$

A (7) közelítő alakot (6)-ba írva:

$$F_y(a+x) \approx \frac{mg}{2} \cdot \frac{x+a}{a} \left(1 - \frac{ax}{d^2+a^2}\right) + D(a+x) - D \left(1 - \frac{ax}{d^2+a^2}\right) (a+x).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és az x^2 -t tartalmazó tagokat elhagyva, a következő kifejezést kapjuk:

$$F_y(a+x) = \frac{mg}{2} + \left[\frac{mg}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{d^2+a^2} \right) + D \frac{a^2}{d^2+a^2} \right] x.$$

Ezt (3)-ba írva:

$$F_y = - \left[mg \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{d^2+a^2} \right) + 2D \frac{a^2}{d^2+a^2} \right] x.$$

Látható, hogy itt F_y lineáris x -ben és együtthatója a D' irányítás erő:

$$D' = \frac{mg}{a} \cdot \frac{d^2}{d^2+a^2} + 2D \frac{a^2}{d^2+a^2}.$$

Végül a rezgésidő (5) alapján:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(d^2+a^2)a}{2a^3D + d^2mg}}.$$

Horváth Ákos (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Több megoldó nem vette figyelembe az $F(a)$ rugóerőt, ami egyensúlyi helyzetben lép fel a rugókban.