

Térítsük ki az M tömegű testet alaphelyzetéből φ szöggel, és számítsuk ki a (tökéletesen rugalmas) ütközés utáni sebességeket!

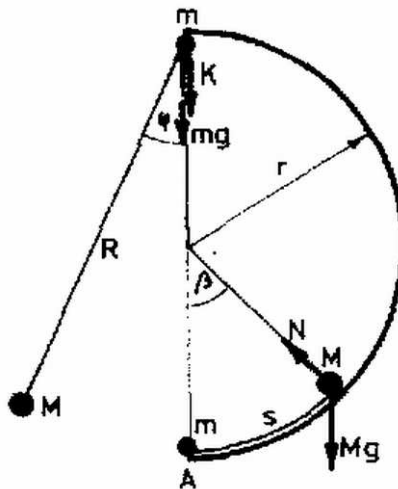
A mechanikai energiamegmaradás tétele alapján az M tömegű test olyan V sebességgel érkezik az A pontba (1. az ábrát), amelyre nézve

$$(1) \quad MgR(1 - \cos \varphi) = (1/2)MV^2.$$

Ütközés közben a két test között csak belső erők hatnak, így az impulzusmegmaradás tétele szerint

$$(2) \quad MV = MU + mu$$

ahol U , ill. u az M , ill. m tömegű testek ütközés utáni sebessége.



Rugalmas ütközés esetén az energiamegmaradás tétele alapján

$$(3) \quad (1/2)MV^2 = (1/2)MU^2 + (1/2)mu^2.$$

Az (1)-(3) egyenletekből

$$(4) \quad U = \frac{M-m}{M+m} \quad V = \frac{M-m}{M+m} \sqrt{2gR(1-\cos\varphi)},$$

$$(5) \quad u = \frac{2M}{M+m} \quad V = \frac{2M}{M+m} \sqrt{2gR(1 - \cos \varphi)},$$

Vizsgáljuk meg ezek után, mi a feltétele annak; hogy az m tömegű test befussa a félkörívet!

Pályájának tetőpontján a w sebességgel rendelkező m tömegű testre az mg nehézségi erő és a pálya K kényszerereje hat:

$$(6) \quad K + mg = mw^2/r.$$

Határesetben $K = 0$, vagyis (6)-ból

$$(7) \quad w = \sqrt{gr}.$$

Legalább ekkora sebességű kell, hogy legyen az m tömegű test a pálya tetőpontján.

Az m tömegű testnek akkora u sebességgel kell indulnia az A pontból, hogy

$$(8) \quad (1/2)mu^2 \geq (1/2)mw^2 + 2mgr$$

legyen. Behelyettesítve a (8) egyenlőtlenségbe u és w (5), ill. (7) kifejezéseit, majd rendezve kapjuk, hogy

$$(9) \quad 0 \leq \cos \varphi \leq 1 - \frac{5}{8} \frac{r}{R} \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2,$$

ahol a bal oldali egyenlőtlenség $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ miatt teljesül.

Adatainkkal a minimális kitérítés szögére (9)-ből ($90^\circ \geq \varphi \geq 72,7^\circ$) adódik.

A minimális tömegarányt ugyancsak (9)-ből kapjuk $\varphi = 90^\circ$ (a legkedvezőbb eset) helyettesítéssel:

$$(10) \quad \frac{M}{m} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{5} \frac{R}{r}} - 1}.$$

Adatainkkal: $M/m \geq 1,27$. A (10) egyenlőtlenségből leolvashatjuk még, hogy $R/r \leq 5/8$ esetén M és m nem választható meg úgy, hogy az m tömegű test befussa a, félkörívet.

Végezetül számítsuk ki, hogy az ingatest legkisebb szükséges kitérítése ($\varphi = 72,7^\circ$) esetén mekkora utat fut be az M tömegű test! Az ingatest ütközés utáni helyzetét a köríven jellemezzük a β szöggel, sebessége legyen W ! Ekkor a sugárirányú erőkre

$$(11) \quad N - Mg \cos \beta = MW^2/r,$$

ahol N jelöli a pálya kényszererőjét. A test a körpályán addig emelkedik, amíg az alábbi feltételek egyike be nem következik:

- a) $N = 0$ ($\beta \geq 90^\circ$) vagy
- b) $W = 0$ ($\beta \leq 90^\circ$).

A test W sebességét a mechanikai energiamegmaradás tételéből számolhatjuk:

$$(12) \quad (1/2)MU^2 = (1/2)MW^2 + Mgr(1 - \cos \beta).$$

A fenti egyenletbe $W = 0$ értéket helyettesítve, valamint felhasználva (4)-et, adatainkkal ($\varphi = 72,7^\circ$) kapjuk, hogy a $W = 0$ feltétel $\beta_{\max} = 32,5^\circ$ esetén teljesül, vagyis a b) eset valósul meg. Így az M tömegű test által befutott ívhossz

$$s = r\beta\pi/180^\circ = 0,5 \text{ m} \cdot 32,5^\circ \cdot \pi/180^\circ = 0,28 \text{ m}.$$

Babarczy Emese (Kalocsa, I. István Gimn., III. o. t.)