



A vízszintes talajon guruló golyó a lejtő aljánál v_0 sebességű haladó, és ω_0 szögsebességű forgó mozgást végez. Ekkor $v_0 = r\omega_0$, ahol r a golyó sugara.

A lejtőn a golyó forgását csak a súrlódási erő lassítja, ezért a golyóra ható súrlódási erő a lejtőn felfelé mutat. Máris megállapíthatjuk, hogy ha van súrlódás, akkor a golyó lassulása kisebb lesz, és így magasabbra jut a lejtőn. Számítsuk ki, milyen magasra jut a golyó!

A golyó mozgásegyenlete a lejtőn:

$$(1) \quad ma = mg \sin \alpha - F_s,$$

ahol F_s jelöli a súrlódási erőt. A lejtőn megtett út $s = v_0^2/2a$, az elért h magasság pedig $h = s \sin \alpha$. E három egyenletből:

$$(2) \quad h = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{2(g \sin \alpha - F_s/m)}.$$

Ha a súrlódási együttható kicsi, akkor a súrlódási erő csak kis mértékben képes lassítani a forgó mozgást, és a golyó csúszva gördül. Ekkor a lejtőn

$$(3) \quad r\omega > v \quad \text{és} \quad F_s = \mu mg \cos \alpha.$$

Ha a súrlódási együttható elég nagy, akkor a golyó „tisztán” gördülve áll meg, ilyenkor minden pillanatban $r\omega = v$. A forgó mozgás mozgásegyenlete:

$$(4) \quad \Theta \beta = F_s r,$$

ahol Θ a golyó tehetetlenségi nyomatéka ($\Theta = (2/5)mr^2$), és β a szöggyorsulása. Gördülés esetén

$$(5) \quad a = r\beta.$$

Az (1), (4) és (5) egyenletekből

$$(6) \quad F_s = (2/7)mg \sin \alpha.$$

Gördülésnél a golyó és a lejtő között tapadó súrlódás van, így

$$(7) \quad F_s \leq \mu mg \cos \alpha.$$

(6) és (7)-ből ekkor:

$$\mu \geq (2/7)\tan \alpha.$$

Tehát ha a μ súrlódási együttható $0 \leq \mu < (2/7)\tan \alpha$, akkor a golyó a lejtőn csúszva gördül, és az elért magasság (2) és (3) felhasználásával

$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 - \mu \cot \alpha)}.$$

Ha a súrlódási együttható $\mu \geq (2/7)\tan \alpha$, akkor a golyó tisztán gördül. Ebben az esetben éri el a legnagyobb magasságot, (2) és (6) segítségével:

$$h = \frac{7v_0^2}{10g}.$$