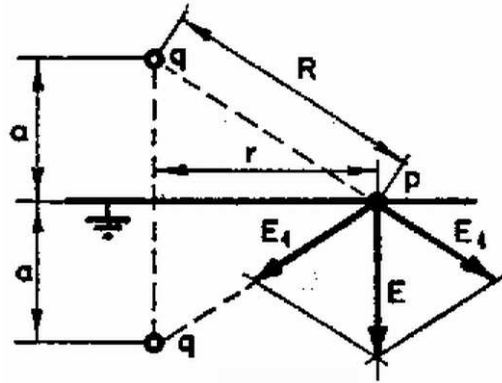


Először az a) ábra szerinti elrendezésnek megfelelő töltéeloszlást számítjuk ki. A töltéssűrűség csak attól függ, hogy milyen távolságra vagyunk a töltéstől, vagy a töltésből a síkra bocsátott merőleges talppontjától. Jelöljük ez utóbbi ponttól való távolságot a síkban r -rel (1. ábra).



1. ábra

Az 1748. feladat megoldásából tudjuk, hogy a térerősséget a fémlemez felületén úgy számíthatjuk ki, hogy tükrözzük a q töltés helyét a fémlemezre és a tükörpontba egy $-q$ töltést helyezünk. Az így kapott q és $-q$ töltés együttes tere a fémlemez felett megegyezik azzal a térrel, amelyet az eredeti q töltés és a hatására elektromos megosztással a fém felületén megjelenő töltések hoznak létre.

Ha kiszámítjuk a térerősséget a lemez felületéhez közel, illetve a lemez felületén, mint az r távolság függvényét, ebből már kiszámíthatjuk a töltéssűrűséget is mint az r függvényét. A q töltés által létrehozott térerősség a P pontban $E_1 = k \frac{q^2}{R^2}$ ahol k állandó, R pedig a P pont és a q töltés távolsága: $R = \sqrt{r^2 + a^2}$. A $-q$ töltés által létrehozott térerősség a P pontban szintén E_1 nagyságú, de iránya más, (l. az 1. ábrát). Az eredő térerősség a fémlemezre merőleges irányú, nagysága

$$E(r) = E_1 \frac{2a}{R} = 2qk \cdot \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A térerősségből kiszámíthatjuk a felületegységre jutó töltésmennyiséget, azaz a töltéssűrűséget. Mivel Q töltésből $4\pi kQ$ erővonal indul ki, a töltéssűrűség

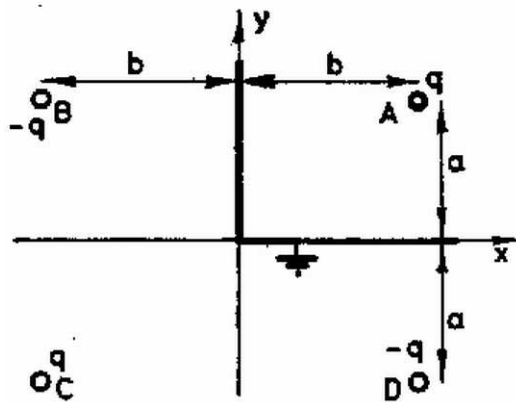
$$\sigma = \frac{E}{4\pi k}.$$

Így a P pontban a töltéssűrűség

$$\sigma(r) = \frac{E(r)}{4\pi k} = \frac{q}{2\pi} \frac{a}{(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

ami éppen a keresett töltéeloszlást jellemző függvény.

A $b)$ esetben a feladat nem hengersizmetrikus. Itt – noha a megoldás hasonló – a fémlemez felületén mindkét fűlsíkon két koordinátát kell bevezetnűnk.



2. ábra

A tükörtöltéseket a 2. ábrán rajzoltuk be: két $-q$ és egy $+q$ töltésű tükörtöltést kell felvennünk. Legyen koordináta-rendszerünk olyan, hogy a z tengely essék egybe a két fémlemez metszésvonalával, az x tengely illeszkedjék az egyik fémlemezre, az y tengely pedig a másikra. Ekkor a négy töltés koordinátái a következők:

$$\begin{aligned} (q) \quad A &= (b, a, 0) \\ (-q) \quad B &= (-b, a, 0) \\ (q) \quad C &= (-b, -a, 0) \\ (-q) \quad D &= (b, -a, 0). \end{aligned}$$

A vizsgált P pont, amely az (x, z) síkban van, legyen

$$P = (x, 0, z).$$

A megfelelő távolságok:

$$\begin{aligned} R_{AP} &= \sqrt{(b-x)^2 + a^2 + z^2}, & R_{BP} &= \sqrt{(b+x)^2 + a^2 + z^2}, \\ R_{CP} &= \sqrt{(b+x)^2 + a^2 + z^2}, & R_{DP} &= \sqrt{(b-x)^2 + a^2 + z^2}. \end{aligned}$$

A négy ponttöltés által létrehozott térerősségnek az (x, z) síkra merőleges összetevője a P pontban

$$\begin{aligned} E_A &= -k \frac{q}{R_{AP}^2} \cdot \frac{a}{R_{AP}}; & E_B &= k \frac{q}{R_{BP}^2} \cdot \frac{a}{R_{BP}}; \\ E_C &= k \frac{q}{R_{CP}^2} \cdot \frac{a}{R_{CP}}; & E_D &= -k \frac{q}{R_{DP}^2} \cdot \frac{a}{R_{DP}}. \end{aligned}$$

Így a P pontban az eredő térerősség

$$E = E_A + E_B + E_C + E_D,$$

behelyettesítve

$$E(x, 0, z) = 2kga \cdot \left\{ \left[\frac{1}{(b+x)^2 + a^2 + z^2} \right]^{3/2} - \left[\frac{1}{(b-x)^2 + a^2 + z^2} \right]^{3/2} \right\};$$

míg az (y, z) síkban hasonlóan kapjuk, hogy

$$E(0, y, z) = 2kgb \left\{ \left[\frac{1}{(a+y)^2 + b^2 + z^2} \right]^{3/2} - \left[\frac{1}{(a-y)^2 + b^2 + z^2} \right]^{3/2} \right\}.$$

A keresett töltéeloszlás pedig

$$\begin{aligned} \sigma(x, 0, z) &= \frac{qa}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{(b+x)^2 + a^2 + z^2} \right]^{3/2} - \left[\frac{1}{(b-x)^2 + a^2 + z^2} \right]^{3/2} \right\}; \\ \sigma(0, y, z) &= \frac{qb}{2\pi} \left\{ \left[\frac{1}{(a+y)^2 + b^2 + z^2} \right]^{3/2} - \left[\frac{1}{(a-y)^2 + b^2 + z^2} \right]^{3/2} \right\}. \end{aligned}$$