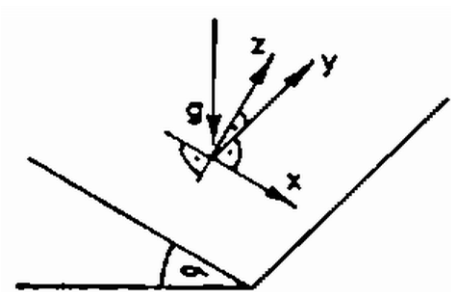


I. megoldás. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy benne a lejtő a $Z = 0$ egyenletű sík legyen, az x tengely legyen a feldobási ponton áthaladó esésvonal, az y tengely pedig ugyanezen a ponton áthaladó szintvonal (l. az 1. ábrát).



1. ábra

Az origóból elindított testek mindenkor egy gömbfelületen helyezkednek el, amelynek középpontja g -vel szabadon esik, sugara pedig $v_0 \cdot t$ szerint tágul ($t = 0$ időpillanatban történt a dobás). A gömb egyenlete:

$$(1) \quad [x - (g/2) \sin \alpha \cdot t^2]^2 + y^2 + [z + (g/2) \cos \alpha \cdot t^2]^2 = v_0^2 \cdot t^2$$

A t időpillanatban a becsapódás x, y koordinátái kielégítik az

$$(2) \quad [x - (g/2) \sin \alpha \cdot t^2]^2 + [(g/2) \cos \alpha \cdot t^2]^2 = v_0^2 t^2$$

egyenletet.

Rögzített x mellett keressük y szélsőértékét! t^2 -nek egy másodfokú függvényéről van szó, amely a maximumát

$$t^2 = \frac{v^2 + xg \sin \alpha}{2 \cdot (g/2)^2}$$

esetén veszi fel, a maximum értéke

$$(3) \quad y^2 = \frac{(v^2 + xg \sin \alpha)^2}{g^2} - x^2.$$

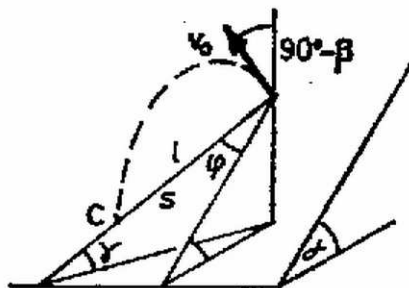
Ezt az egyenlőséget rendezve kapjuk a következő összefüggést:

$$(4) \quad \frac{y^2}{(v^2/g \cos \alpha)^2} + \frac{[x - v^2 \sin \alpha / (g \cos \alpha)]^2}{(v^2/g \cos^2 \alpha)^2} = 1.$$

Ez a becsapódások helyét határoló ellipszis egyenlete, amelyen belül minden pontba (a határra is) eshetnek a testek. Az origó az ellipszis egyik fókusza.

Kovács Tamás (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján

II. megoldás. Vegyünk fel a lejtő síkjában egy polárkoordináta-rendszert, amelynek tengelye a dobási pontból induló esésvonal. Minden eldobott test pályájának a lejtő síkjára vett függőleges vetülete egy e félegyenés, ennek polárszögét jelöljük φ -vel, a vízszintessel bezárt szögét γ -val (2. ábra).



2. ábra

Keressük az e félegyenes mentén azt a legtávolabbi pontot, ahol leeshetnek a testek, ennél közelebb levő bármely pontra irányítható a dobás kisebb vagy nagyobb szögű hajítással.

A γ és α szög közötti összefüggés a Pitagorasz-tétel alapján:

$$(5) \quad \cos^2 \gamma = 1 - \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \alpha.$$

A C becsapódási pont távolsága 0-tól, a β hajítási szög függvényében: (2. ábra)

$$(6) \quad s = \frac{\sin(2\beta + \gamma) + \sin \gamma}{g \cos^2 \gamma} \cdot v^2.$$

Ennek $\beta = 135^\circ - (\gamma/2)$ esetén van maximuma, amelynek értéke

$$(7) \quad s_{\max} = \frac{v^2}{g(1 - \sin \gamma)}.$$

(5) alapján:

$$s_{\max} = \frac{v^2}{g(1 - \cos \varphi \cdot \sin \alpha)}.$$

Ez egy ellipszis polárkoordinátás egyenlete, a becsapódási helyek határoló görbéjének az egyenlete.

Erdős László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)