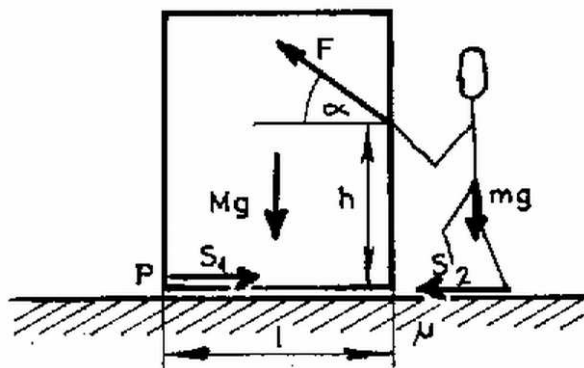


Az l szélességű láda eltolásához szükséges F tolóerőnek a vízszintessel bezárt α szögét, valamint támadáspontjának a talajtól mért h távolságát úgy kell megválasztanunk, hogy egyidejűleg a következő feltételek teljesüljenek:

- a láda csúszik a talajon,
- a ládát toló ember nem csúszik meg,
- a láda nem billen fel,
- a ládát az ember nem emeli fel.

(Feltételezzük, hogy a ládát toló ember nem billen fel.)

Ezek a feltételek a keresett F , α , h paraméterekre rendre a következő megszorításokat adják (l. az ábrát):



$$\begin{aligned}
 S_1 &= \mu(Mg - F \sin \alpha) \leq F \cos \alpha, \\
 F \cos \alpha &\leq \mu(mg + F \sin \alpha) = S_2, \\
 Fh \cos \alpha + Fl \sin \alpha &\leq Mgl/2, \\
 F \sin \alpha &\leq Mg;
 \end{aligned}$$

vagy kissé átrendezve

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \geq \mu Mg, \\
 (2) \quad & F(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) \leq \mu mg, \\
 (3) \quad & F[(h/l) \cos \alpha + \sin \alpha] \leq \mu Mg/2, \\
 (4) \quad & F \sin \alpha \leq Mg.
 \end{aligned}$$

Itt S_1 , ill. S_2 a láda és a talaj, ill. az ember és a talaj közötti súrlódási erőt, F a tolóerő abszolút értékét jelöli, a felbillenés elleni stabilitás (3) feltételében a forgatónyomatékokat a P pontra írtuk fel.

Feladatunk az, hogy az F , α , h paraméterek olyan tartományait találjuk meg, amelyekre az (1)–(4) egyenlőtlenségek egyidejűleg teljesülnek. (L. az 1663. feladatot, KML 62. 1981, 131. oldal.)

Először is vegyük észre, hogy (4)-nél (3) szigorúbb feltétel, így (4)-et egyszerűen elhagyhatjuk. Továbbá $F > 0$ miatt (1) bal oldalának pozitívnak kell lennie, ezért teljesülnie kell a

$$(5) \quad \operatorname{tg} \alpha > -1/\mu$$

feltételnek. A (2) és (3) bal oldalán a zárójelben levő kifejezés előjele tetszőleges lehet, ami négy különböző esetet jelent.

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad & \cos \alpha - \mu \sin \alpha \geq 0, \\
 (2b) \quad & \cos \alpha - \mu \sin \alpha < 0, \\
 (3a) \quad & (h/l) \cos \alpha + \sin \alpha \geq 0, \\
 (3b) \quad & (h/l) \cos \alpha + \sin \alpha < 0.
 \end{aligned}$$

Ezek közül a (2b) és (3b) egyidejűleg nem állhat fenn, hiszen (2b) a $\operatorname{tg} \alpha > 1/\mu > 0$ feltételt, míg (3b) a $\operatorname{tg} \alpha < (-h/l) < 0$ feltételt jelenti. A többi egyenlőtlenség egyidejűleg is teljesülhet, ezért meg kell vizsgálnunk az egyes eseteket az eredeti (1)–(3) feltételekbe visszahelyettesítve.

I. Tegyük fel, hogy (2b) teljesül, vagyis $\operatorname{tg} \alpha > 1/\mu$. Ekkor az előzőek alapján csak a (3a), azaz a $\operatorname{tg} \alpha \geq (-h/l)$ feltétel lehetséges. Feltevésünk értelmében a (2) feltétel minden $F > 0$ értékre teljesül, (1) és (3) pedig csak akkor fér össze, ha lehetséges α és h olyan megválasztása, amelyre

$$\frac{Mg}{2[(h/l) \cos \alpha + \sin \alpha]} \geq \frac{\mu Mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}.$$

Ezt rendezve kapjuk, hogy

$$(6) \quad \operatorname{tg} \alpha \leq (1/\mu) - (2h/l),$$

ami azonban lehetetlen, hiszen (2b) értelmében $\operatorname{tg} \alpha > 1/\mu$.

II. Tekintsük most azt az esetet, amikor (2a) és (3b) teljesül, azaz az ezekkel egyenértékű $\operatorname{tg} \alpha \leq 1/\mu$, ill.

$$(7) \quad \left(-\frac{1}{\mu}\right) < \operatorname{tg} \alpha < -\frac{h}{l} < 0$$

feltételt. Ekkor (3) minden $F > 0$ -ra teljesül, (1) és (2) viszont csak akkor fér össze, ha lehetséges α értékének olyan megválasztása, hogy

$$\frac{\mu Mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha},$$

Ezt rendezve a

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha \geq -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{m - M}{m + M}$$

egyenlőtlenség adódik. Mivel $\operatorname{tg} \alpha < 0$, (8) csak akkor teljesül, ha $m > M$. Ugyanakkor $m > M$ esetén (8) az (5) feltételnél szigorúbb. Összehasonlítva (8)-at (7)-tel, kapjuk:

$$(7a) \quad -\frac{h}{l} > \operatorname{tg} \alpha \geq -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{m - M}{m + M} \quad (m > M).$$

Ha az F erő támadáspontját úgy választjuk, hogy

$$(9) \quad 0 < h \leq \frac{1}{\mu} \frac{m - M}{m + M} l,$$

biztosan létezik a (7a) feltételnek eleget tevő α érték. Ilyenkor a tolóerő olyan értékű lehet, amelyre teljesül

$$(10) \quad \frac{\mu Mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq F \leq \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}.$$

A fentiekből világos, hogy az előbbi feltételeknek eleget tevő F , α , h esetén az. (1)–(3) feltételek valóban teljesülnek.

Ezt az esetet illusztráljuk egy számpéldával!

Legyen $m = 60$ kg, $M = 30$ kg, $\mu = 0,5$, $l = 1$ m. (9) alapján ekkor $0 < h \leq (2/3)$ m. Válasszuk pl. a $h = 0,5$ m-t, ekkor (8)-ból $(-1/2) \geq \operatorname{tg} \alpha \geq (-2/3)$; $(-26,6^\circ) > \alpha \geq (-33,7^\circ)$. Legyen pl. $\alpha = -30^\circ$, ekkor (10) alapján F nagyságát úgy kell megválasztanunk, hogy

$$243,5 \text{ N} \leq F \leq 268,8 \text{ N}.$$

III. Vizsgáljuk végül azt az esetet, amikor (2a) és (3a) teljesül, azaz, ha $\operatorname{tg} \alpha \leq 1/\mu$ és $\operatorname{tg} \alpha \geq \max\{(-h/l), (-1/\mu)\}$ egyidejűleg teljesül. (1) és (2), ill. (1) és (3) összeférhetőségének feltétele a korábban már megkapott (8) és (6) egyenlőtlenség, ezeket összevontan így írhatjuk:

$$(11) \quad \frac{1}{\mu} \cdot \frac{M - m}{M + m} \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{l}.$$

A fenti feltételt kielégítő α választás akkor lehetséges, ha

$$(12) \quad \frac{1}{\mu} \frac{M - m}{M + m} \leq \frac{1}{\mu} - \frac{2h}{l}.$$

A (11)-nek eleget tevő α értékek esetén F olyan lehet, amelyre

$$(13) \quad \frac{\mu Mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \leq F \leq \min \left\{ \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}, \frac{Mg}{2[(h/l) \cos \alpha + \mu \sin \alpha]} \right\}.$$

Az előbbieknél elegendő F , α , h esetén mindig teljesülnek az (1)–(3) feltételek.

Végezetül lássunk itt is egy számpéldát: $m = 60$ kg, $M = 120$ kg, $l = 1$ m, $\mu = 0,5$ esetén (12)-ből

$$h \leq \frac{1}{\mu} \frac{m}{M+m} = \frac{2}{3} \text{ m.}$$

Válasszuk pl. a $h = 0,5$ m-t, ekkor (11)-ből $(2/3) \leq \tan \alpha \leq 1$, vagyis $33,7^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ$. Legyen pl. $\alpha = 40^\circ$, ekkor (13) alapján F úgy választandó, hogy

$$551,8 \text{ N} \leq F \leq 674,7 \text{ N}$$

teljesüljön.

Tóth Mihály (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn., II. o. t.)
dolgozata alapján