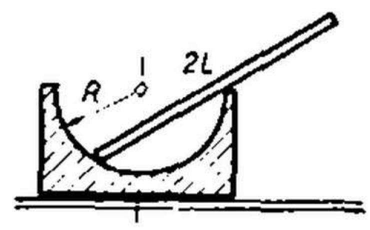


Legyen a rúd vízszintessel bezárt szöge α. A rúdra az 1. ábrán feltüntetett három erő hat: a G súlyerő, valamint az edény által a rúdra gyakorolt F_1, illetve F_2 erő. Mivel a rendszerben nincs súrlódás, F_1 erő az edény falára merőleges hatásvonalú, F_2 pedig a rúd irányára merőleges hatásvonalú. A rendszer egyensúlyának feltétele, hogy e három erő hatásvonala egy ponton menjen át. Mivel F_1 sugárirányú, F_2 pedig a rúdra merőleges irányú, az erők hatásvonala Thales tétele miatt a 2. ábrán feltüntetett kör kerületén metszi egymást. OC szakasz merőleges BD-re, így $DC = CB$, ezért a DC íven nyugvó $DAC\sphericalangle$ egyenlő a CB íven nyugvó $CAB\sphericalangle$-gel, azaz $CAB\sphericalangle = \alpha$. Innen

$$AB = 2R\cos 2\alpha.$$

Mivel $L = AP = AB/\cos\alpha$, az előző egyenletet felhasználva

$$L = \frac{2R\cos 2\alpha}{\cos\alpha}.$$

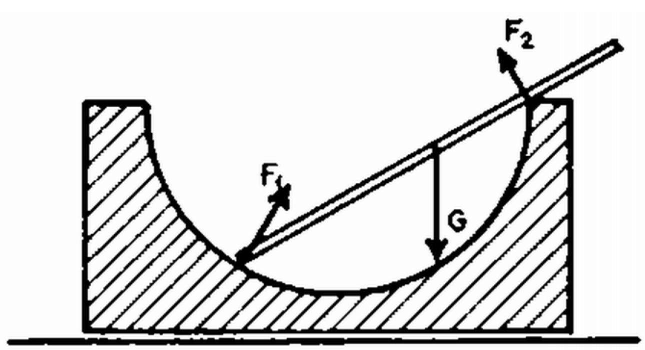
Az egyenletet $\cos\alpha$-ra oldjuk meg:

$$L\cos\alpha = 2R(2\cos^2\alpha - 1),$$
$$4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0.$$

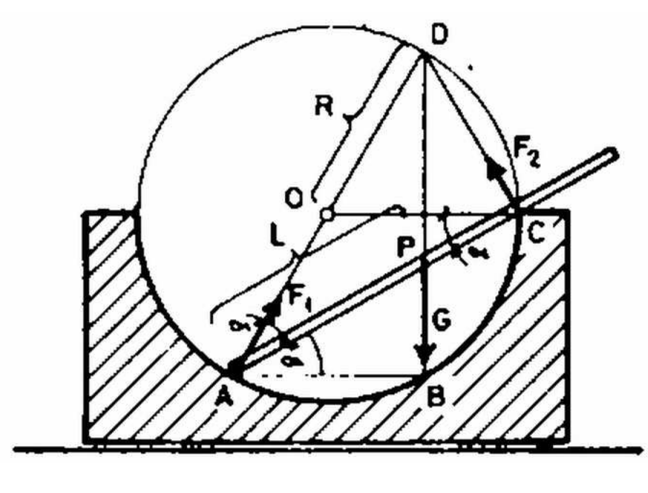
Innen

$$\cos\alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}.$$

Az egyenlet másik gyöke $\cos\alpha$-ra negatív értéket adna, de ez nem lehetséges, mivel α a vízszintessel bezárt szög, így $0 \leqq \alpha \leqq 90°$.



1. ábra



2. ábra

Most határozzuk meg a rúd lehetséges hosszát!

$$0 \leqq \alpha \leqq 90^\circ, \quad \text{így} \quad 1 \geqq \cos\alpha \geqq 0, \quad \text{azaz}$$
$$1 \geqq \frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R} \geqq 0.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldala mindig teljesül. Vizsgáljuk az egyenlőtlenség bal oldalát! Átrendezve:

$$8R \geqq L+\sqrt{L^2+32R^2}.$$

Innen $2L \leqq 4R$ adódik.
A rúd minimális hosszának meghatározásához vizsgáljuk ismét a 2. ábrát! Jelölje P a G súlyerő támadáspontját! A rúd hossza $2L$, $AP=L$, így $PC \leqq L$ kell, hogy teljesüljön.

Az ACD háromszögben $AC=2R\cos\alpha$, így $PC=AC-L=2R\cos\alpha-L$. Az előző egyenlőtlenségbe helyettesítve:

$$2R\cos\alpha-L \leqq L, \qquad \text{azaz}$$
$$R\cos\alpha \leqq L.$$

A $\cos\alpha$-ra kapott összefüggést felhasználva:

$$R\cdot\frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8R} \leqq L.$$

Az egyenlőtlenséget rendezve $2R\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq 2L$ adódik.

A rúd vízszintessel bezárt szögének cosinusa tehát:

$$\cos\alpha=\frac{L+\sqrt{L^2+32R^2}}{8L},$$

lehetséges hossza pedig:

$$2R\sqrt{2/3} \leqq 2L \leqq 4R.$$

Fáth Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)