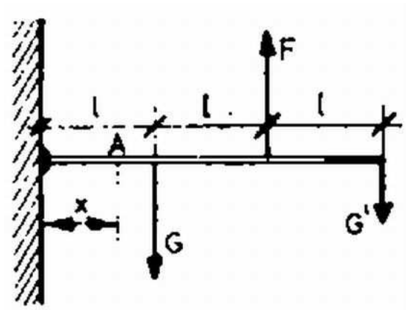
A rúd bármely pontjában ható erő csak a rögzített vég és az erő támadáspontja között elhelyezkedő rúddarabra hat (ez a rúddarab deformálódik), a támadáspontján kívüleső rúddarab „nem érzi” az erő jelenlétét (ez a rész nem deformálódik).

Hogy a rögzítési ponttól x távolságra levő A pontban, eltörik-e a rúd vagy sem, az attól függ, hogy a ponton kívül (a rögzítési ponttól távolabb) ható erők által a pontra ható forgatónyomaték abszolút értéke kisebb vagy nagyobb-e $G\cdot l$-nél (1. ábra). Ha kisebb, úgy nem törik el az A pontban a rúd, ha nagyobb, akkor eltörik. (Nem csak a végpontbeli törést kell vizsgálnunk.) Vizsgáljuk meg, milyen feltételt rovunk ki így G'-re.

Ha $0 < x < l$ akkor mindhárom erő támadáspontján belül vagyunk, tehát mindhárom erő forgatónyomatékát figyelembe kell vennünk.



1. ábra

(1) $$-Gl < (l-x)G - (2l-x)F + (3l-x)G' < Gl.$$

Ha $l < x < 2l$, akkor

(2) $$-Gl < -(2l-x)F + (3l-x)G' < Gl.$$

Ha $2l < x < 3l$ akkor a feltétel:

(3) $$-Gl < (3l-x)G' < Gl.$$

Ha azt akarjuk, hogy a rúd ne törjön el sehol, úgy mindhárom egyenlőtlenségpárnak teljesülnie kell. Vizsgáljuk (3)-at. Ha G' G irányú (lefelé mutat):

$$(3l-x)G' < Gl; \qquad 2l < x < 3l.$$

A bal oldal $x = 2l$-nél maximális, így feltételünk

$$G' < G.$$

Ugyanígy, ha G' G-vel ellentétes irányú:

$$-G < G'.$$

Azaz a (3) feltételünk átalakítva úgy, hogy minden x-re teljesüljön:

(3a) $$-G < G' < G.$$

Vizsgáljuk a (2) feltétel jobb oldalát:

$$-(2l-x)F + (3l-x)G' < Gl.$$

Átrendezve és átalakítva kapjuk, hogy

$$(3l-x)G' < Gl + (3l-x)F - lF,$$

így G'-re a következő feltétel adódik:

$$G' < (G-F)\frac{l}{3l-x} + F.$$

Ha $F < G$, azaz $G - F > 0$, az egyenlőtlenségnek $\left|(G-F)\frac{l}{3l-x}\right|$ minimális értékénél is fenn kell állnia. $\frac{l}{3l-x}$ minimális, ha $x = l$: így $G' < \frac{G+F}{2}$.

Ha $F > G$, azaz $G - F < 0$, az egyenlőtlenségnek $\left|(G-F)\frac{l}{3l-x}\right|$ maximális értékénél is fenn kell állnia, azaz $x = 2l$-nél is. Így $G' < G - F + F$, azaz $G' < G$. A másik oldal:

$$-Gl < -(2l-x)F + (3l-x)G',$$

átalakítva

$$(3l-x)F-Fl-Gl<(3l-x)G',$$

innen

$$F-(F+G)\frac{l}{3l-x}<G'.$$

Hasonlóan az előző meggondolásokhoz, mind $F<G$, mind $F>G$, esetben:

$$G'>\frac{F-G}{2},$$

mivel az egyenlőtlenségnek $\dfrac{l}{3l-x}$ minimális értékénél is fenn kell állnia. (2) feltételünk átalakítva tehát a következő lesz:

(2a) $$\frac{F-G}{2}<G'<\frac{F+G}{2},\qquad \text{ha}\qquad F<G,$$

(2b) $$\frac{F-G}{2}<G'<G,\qquad \text{ha}\qquad F>G.$$

Az (1) feltételt is hasonlóan vizsgálva, mint az előzőket kapjuk, hogy:

$$(l-x)G-(2l-x)F+(3l-x)G'<Gl,$$

$$G'<F-G+(3G-F)\frac{l}{3l-x}.$$

Tehát

$F<3G$ esetén a $G'<\dfrac{2F}{3}$,

$F>3G$ esetén pedig a $G'<\dfrac{F+G}{2}$egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

Az (1) egyenlőtlenség másik oldalát vizsgáljuk meg ezután.

$$-Gl<(l-x)G-(2l-x)F+(3l-x)G',$$

ebből átrendezéssel:

$$G+F+(G-F)\frac{l}{3l-x}<(3l-x)G'$$

Ezekből következik, hogy $F<G$ esetén a $\dfrac{F-G}{2}<G'$ egyenlőtlenségnek, $F>G$ esetén pedig a $\dfrac{2}{3}(F-G)<G'$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.

A két feltételrendszert összeolvasztva:

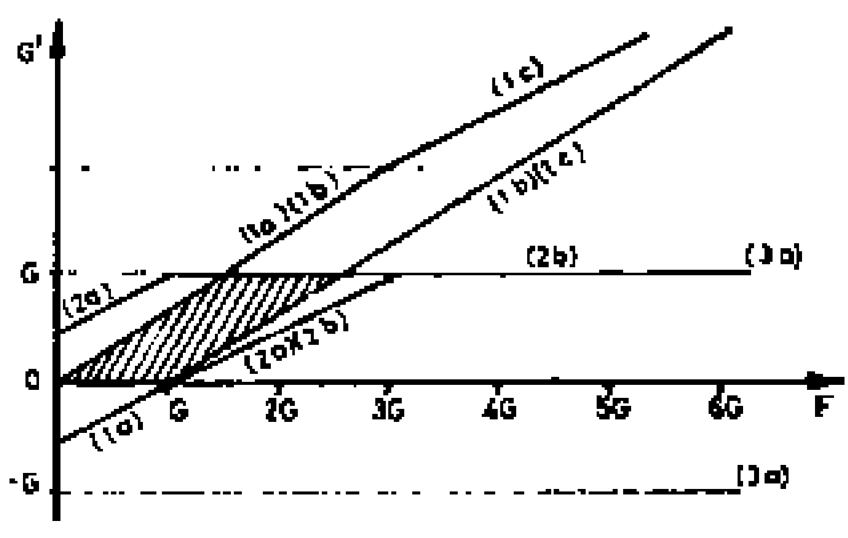
(1a) $$\frac{F-G}{2}<G'<\frac{2}{3}F,\qquad \text{ha}\qquad F<G;$$

(1b) $$\frac{2}{3}(F-G)<G'<\frac{2}{3}F,\qquad \text{ha}\qquad G<F<3G;$$

(1c) $$\frac{2}{3}(F-G)<G'<\frac{F-G}{2},\qquad \text{ha}\qquad 3G<F.$$

A rúd akkor nem törik el, ha az (1a,b,c), (2a,b) és (3a) feltételek egyszerre teljesülnek.

Ábrázoljuk grafikusan (l. a 2. ábrát) a feltételeket, a besatírozott rész jelenti adott F és G mellett G' lehetséges értékeit.



2. ábra

Mivel a rúdra *akasztott súlyról* volt szó, így G' pozitív értékeit (G-vel egyirányú) vesszük csak figyelembe. Ezek alapján a feltételek:

$$\begin{aligned} 0 < G' &< \frac{2}{3}F, && \text{ha} \quad 0 < F < G; \\ \frac{2}{3}(F-G) < G' &< \frac{2}{3}F, && \text{ha} \quad G < F < \frac{3G}{2}; \\ \frac{2}{3}(F-G) < G' &< G && \text{ha} \quad \frac{3G}{2} < F < \frac{5G}{2}. \end{aligned}$$

Furó István